N° D'ORDRE 8464

UNIVERSITE PARIS-SUD XI
Faculté des Sciences d'Orsay

THÈSE DE DOCTORAT

SPECIALITE : PHYSIQUE

Ecole Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes »

Présentée par : Patrick Le Roux

Sujet : Suites Régulières d'Impulsions Radio-fréquence en Résonance Magnétique. Applications à l'IRM.

Soutenue le 17 Novembre 2006 devant les membres du jury

Leon Axel	Rapporteur
Jacques Bittoun	Directeur de thèse
Geoffrey Bodenhausen	Président
Luc Darrasse	Directeur de thèse
Denis Le Bihan	
Klaas Prüssmann	Rapporteur

Remerciements

Il est d'usage au début d'une thèse de remercier et les directeurs de laboratoire et les professeurs ainsi que l'ensemble des confrères du futur impétrant. Reconnaissant le fait, gentiment rappelé à moi par un radiologue de mes amis, que je ne suis peut-être pas le plus vieux thésard de France mais très certainement le plus chenu dans une discipline 'scientifique', on admettra que je ne me soumette pas à la tradition des remerciements exhaustifs. J'ai calculé en effet que cela nécessiterait de l'ordre d'une vingtaine de pages (prenant vingt deux ans comme âge de début de vie professionelle et considérant que la moyenne des pages dévolues habituellement aux remerciements par des jeunes gens de vingt cinq ans est de deux pages). Je pourrais décider de faire un survol rapide de toutes ces années en ne gardant que quelques figures marquantes mais que diront, si tant est qu'ils y accordent une quelconque importance, ceux écartés de la liste ? Aussi, et bien que cela puisse apparaître comme un de mes derniers efforts pour retrouver ma jeunesse (motivation peut-être pas totalement absente de ma décision d'écrire cette thèse), je décide ici d'oublier le passé, et de ne considérer que les quatre dernières années ! Les choses deviennent alors simples.

Je remercie en premier lieu mon employeur *GE Healthcare*, et particulièrement mes responsables de l'*Applied Science Laboratory* : Timo Schirmer à Munich, Nadeem Ishaque à Milwaukee, Ralph Hurd à San Francisco, pour avoir fermé les yeux sur une baisse inévitable de régime pendant la rédaction de la thèse. Qu'également Yi-Fen Yen du groupe 'Biochemical Imaging' qui a été la principale victime de mes absences, et qui a dû combler les trous, me pardonne ici. Mon collègue (et maitre) Graeme McKinnon, de l'*Applied Science Lab* à Milwaukee est celui par qui il m'a été possible de rendre concrètes certaines de mes idées : il est en effet l'auteur de l'environment de programmation que j'utilise depuis plus de dix ans. Il est sans doute inutile de dire que je lui dois beaucoup, mon travail dans le domaine consistant la plupart du temps à ajouter quelques centaines de lignes de code au dessus de nombreux milliers. Graeme est aussi celui qui m'a ouvert les yeux sur l'insuffisance de la séquence CPMG et est donc aussi l'instigateur initial de mon travail du chapitre 4.

Dans la région parisienne, ma reconnaissance va au laboratoire du *Service Hospitalier Frédéric Joliot* du *CEA*, et en son sein à Denis le Bihan, qui m'a accueilli d'une manière beaucoup plus étendue que le contrat de collaboration avec *GE* ne l'exigeait, me fournissant un bureau et le matériel informatique en plus des accès réguliers au système d'imagerie. Il faut noter d'ailleurs que ce système a été mon compagnon pendant près de dix ans et que tous mes travaux récents y ont été développés et testés. En ce sens je suis également redevable à la Région Ile de France qui a participé au financement de ce tomographe IRM. A l'intérieur du SHFJ, mes remerciements vont à Vincent Lebon avec qui j'ai échangé des conversations fructueuses et qui m'a accueilli dans son bureau, ainsi qu'à Cyril Poupon qui en dehors de longues conversations sur EPI (Echo Planar Imaging) que nous avons eues, régla pour moi de difficiles problèmes d'informatique, science en laquelle, malgré toutes ces années, je ne serai jamais plus qu'un amateur éclairé. Toujours dans la région

parisienne qu'il me soit permis de remercier le docteur Isabelle Klein de l'hopital Bichat pour les acquisitions du chapitre 4. De la même façon, la séquence non-CPMG du chapitre 4 doit beaucoup à Azim Celik de GE Healthcare à Istambul et à l'équipe de l'Ecole de Médecine de l'Université Gazi à Ankara, les docteurs Ali Yusuf Oner, Turgut Tali et Fatih Celikyay.

Qu'également soient remerciés le *GlobalResearchCenter* de *GE*, à Munich, qui m'a accueilli récemment, et en son sein, Mika Vogel et Rolf Schulte. Ce dernier a d'ailleurs participé à la vérification des formules donnant l'énergie des impulsions du chapitre 2.

Que mes deux directeurs de thèse, Jacques Bittoun et Luc Darrasse soient remerciés pour leur disponibilité et leurs remarques parfois exigeantes. A titre d'exemple, la réaction assez critique de Luc à la lecture d'une première forme des relations permettant le calcul des ondulations établies au chapitre 2 a été la source de simplifications substantielles. Un grand merci à Anne Leroy-Willig, Geneviève Guillot et Marie Poirier-Quinot, également de l'unité de Recherche en Résonance Magnétique Médicale, pour avoir secondé mes directeurs de thèse lors de la dernière ligne droite, ainsi qu'à Xavier Maître pour son aide permanente.

Qu'il me soit permis de remercier les professeurs Leon Axel et Klaas Prüssmann pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail, et ce d'autant plus que le Français n'est pas leur langue maternelle ; avoir à corriger l'équivalent de deux ou trois articles, en l'espace de deux mois et dans une langue étrangère malgré un emploi du temps surchargé, représente un sacrifice que je sais apprécier à sa juste valeur. Un remerciement spécial est du à Leon Axel qui n'a pas hésité à traverser l'atlantique pour assister à la soutenance.

Enfin je suis extrêmement flatté que le professeur Geoffrey Bodenhausen ait bien voulu participer à ce jury ; évidemment son nom ou ceux de membres d'équipes qu"il a dirigées reviennent souvent dans la suite et c'est la raison qui a poussé mes directeurs de thèse à solliciter sa participation. Le fait qu'il soit présent est un signal pour moi que mon travail n'est pas totalement inutile, au delà de l'imagerie par résonance magnétique ; j'espère simplement qu'il sera suffisamment indulgent et pardonnera mes lacunes en spectroscopie *RMN*.

Table des matières

Remerciements 3

Chapitre 1. Conception d'Impulsions Sélectives, motivation et outils. 9
1. Contexte. 10
2. Représentation des rotations sous forme de spineurs. 22
2.1. Rotation autour de z 25
2.2. Rotation autour de x 26
2.3. Rotation autour d'un axe quelconque situé dans le plan xy 26
2.4. Rotation générale 27
2.4.1. Représentation par une séquence de trois rotations 29
2.4.2. Les angles d'Euler 'classiques' 29
2.5. Du quaternion à l'espace ordinaire 31
2.5.1. Suite de précessions et nutation. 31
2.5.2. L'axe et l'angle de rotation, à partir de α, β 32
2.5.3. Les paramètres de Cayley-Klein 33
2.5.4. Application des spineurs à la simulation 33
3. L'approximation d'excitations radiofréquence par un train d'impulsions dures. 34
3.1. Précédents 34
3.2. Justification du modèle 36
3.3. Les deux dimensions t et ω 39
3.3.1. A ne pas confondre comme étant deux variables conjuguées 39
3.3.2. Le cas discret, les transformées en z et Z 40
4. Annexes 41
4.1. Convergence des réponses de l'approximation par train de Dirac et l'approximation en escalier d'une excitation continue. 41
4.1.1. Complément sur les matrices Quaternion et Spineurs (de Pauli), norme de matrice. 41
4.1.2. Démonstration 43

Chapitre 2. Impulsions Sélectives, l'algorithme *SLR*. 49
1. L'algorithme polynomial *SLR* proprement dit. 50
1.1. Simulation (analyse) d'un train d'impulsions dures par une récursion polynomiale. 50
1.2. Forme générale des fonctions a,b,α,β 55
1.3. Synthèse ou inversion, l'algorithme *SLR* 59

1.3.1. La spécificité de SLR 60
1.3.2. Détermination de la dernière impulsion (d'indice n) 60
1.3.3. Récursion 61
1.3.4. Quelques points secondaires sur *SLR* proprement dit 63
2. Construction des polynômes. 64
2.1. Justification de β comme quantité maîtresse de la conception. 64
2.1.1. Impulsion de saturation ou d'inversion 65
2.1.2. Impulsion de refocalisation 65
2.1.3. Refocalisation CPMG 67
2.1.4. Conception en quelques lignes de code 67
2.2. Filtres à déphasage minimum. 68
2.2.1. Le filtre à déphasage minimum a le coefficient d'ordre 0 maximum 69
2.2.2. Le filtre à déphasage minimum est obtenu sans recherche de zéro 69
2.2.3. Solution à énergie minimum. 70
2.2.4. L'énergie d'une impulsion continue 71
3. Spécification et Conception Optimale de la composante β. 74
3.1. Conception de filtre RIF digitaux par Remez 75
3.1.1. Phase linéaire 75
3.1.2. Conception de filtres RIF digitaux specifiés par leur module 78
3.2. Conception de filtres Remez adoucis 80
3.2.1. Filtres adoucis à phase linéaire 82
3.2.2. Filtres adoucis à phase minimum 84
3.3. Des spécifications physiques aux spécifications de filtre 85
3.3.1. Relations de Pauly 86
3.3.2. Spécifications pour la bascule petit angle, la saturation, l'inversion, la refocalisation spin-echo ou CPMG 87
3.3.3. Spécification de la bascule à 90° 88
3.3.4. Détermination des bords de bandes 90
3.3.5. Vérification 90
4. Développements postérieurs ou induits 90
4.1. Sélection multidimensionnellle 90
4.2. Les impulsions à très large bande 92
5. Conclusion 95
6. Appendice 96
6.1. Simulation d'un train par recursion rétrograde 96

Chapitre 3. Séquences Formées d'un long Train d'Impulsions Identiques. 97
1. Modèles Simples du Signal SSFP ou CPMG 98
1.1. La rotation d'écho à écho 98
1.2. Équilibres dynamiques sans relaxation. 102
2. Mises en équilibre actives 108

2.1. Mise en équilibre adiabatique 109
2.2. Mise en équilibre semi-adiabatique de la SSFP 110
2.3. Stabilisation de la $SSFP$, déphasée, par saturation préalable 112
2.4. Mise en équilibre semi-adiabatique de la séquence CPMG 114
3. Le Modèle simplifié de relaxation 116
4. Conclusion 119
5. Appendice 119
5.1. Amplitude du signal CPMG (sans préparation) 119
5.2. Signal $CPMG$ après stabilisation parfaite 120
5.3. Modèle simplifié du processus de relaxation 120
5.3.1. Relaxation sans repousse 121
5.3.2. Repousse et équilibre statique 123

Chapitre 4. Spin Echo Rapide Insensible à la Phase d'origine. 127
1. Pourquoi Non-CPMG ? 128
1.1. Les applications impossibles avec $CPMG$ 128
1.2. Les solutions de désensiblisation à la phase initiale 129
1.3. La modulation de phase du train d'impulsions 130
1.4. Reconstruction d'un écho de spin réitéré 132
1.5. Modulation Quadratique en tant système stationnaire 133
2. Quelques exemples d'application 134
3. Conclusion 135
Annexe : Reproduction de J. Mag. Res. 155 137

Conclusion 153

Annexes générales. 155
Filtre à déphasage minimum. 156
Le problème de la factorisation de spectre 156
Le filtre à déphasage minimum 157

Bibliographie 159

CHAPITRE 1

Conception d'Impulsions Sélectives, motivation et outils.

L'algorithme connu sous l'abréviation SLR (Shinnar-Le Roux) a été développé de façon indépendante par un groupe de l'université de Pensylnanie, incluant Meir Shinnar, et par moi-même. Le but de cet algorithme est de déterminer la modulation d'amplitude et éventuellement de phase appliquée à la porteuse dans une expérience de Résonance Magnétique afin de créer une répartition en fréquence de l'aimantation qui s'approche au mieux d'une forme prédéfinie. Cet algorithme repose sur la modélisation de la réponse des protons sous l'influence d'une séquence régulière d'impulsions courtes et puissantes (impulsions de Dirac), permettant l'usage de techniques classiques de traitement du signal échantillonné. Il repose aussi sur la représentation des rotations par des spineurs ou par les équations de la mécanique quantique, en place et lieu des équations de Bloch. Ce chapitre peut, en plus d'un exposé de l'algorithme SLR, être considéré comme une introduction à ces deux outils, transformée en Z et spineurs qui seront utilisés plusieurs fois dans les chapitres suivants.

1. Contexte.

Il est probable que ce soit l'imagerie qui ait introduit en Résonance Magnétique les modulations sélectives de formes continues, c'est à dire une enveloppe de support temporel fini, mais de contenu fréquentiel restreint à une bande bien définie. Il y a en effet une différence dans les besoins respectifs de la spectroscopie et de l'imagerie RMN. Bien que cette dernière ait utilisé bien évidemment de nombreux outils développés par la première, elle a été confrontée à des problèmes spécifiques, liés en dernière analyse au temps d'acquisition minimum, c'est à dire au temps nécessaire à la collecte des données permettant la représentation d'une partie de l'objet étudié.

La spectroscopie cherche à exciter de façon homogène toute la bande de fréquence correspondant au déplacement chimique du ou des noyaux étudiés, d'où l'utilisation d'impulsions RF 'dures' approchant l'idéale impulsion de Dirac. En effet, bien qu'à ses débuts la spectroscopie RMN ait utilisé un balayage lent en fréquence où la réception du signal RMN se faisait en parallèle avec l'excitation [**1, 2**], elle devint impulsionnelle dès que la technologie le permit ("Fourier Transform" RMN) pour des raisons de simplicité mais aussi pour optimiser le signal à bruit [**3**]. Dès lors, une expérience de spectroscopie RMN simple - 1D, homo-nucléaire- a été composée d'une excitation impulsionnelle très courte, suivie d'une période de précession libre (free induction decay : FID) où le signal a pu être recueilli en dehors de toute perturbation apportée par l'émetteur. Même les séquences plus compliquées ont comme composantes essentielles des impulsions dures, non sélectives, séparées par des périodes d'évolution libres [**4, 5, 6**].

En ce qui concerne l'imagerie, la séparation temporelle entre périodes d'excitation et périodes de réception est certainement à conserver car le changement d'échelle géométrique entre un spectromètre et une machine corps entier fait que les signaux recueillis peuvent être encore plus ténus mais surtout les puissances d'émission étant extraordinairement plus élevées, l'éblouissement du récepteur par l'émetteur y est garanti. L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est donc par nécessité impulsionnelle, avec des périodes d'excitation courtes suivies de périodes d'encodage et de lecture du signal. Cependant, on est aussi

confronté en imagerie, en particulier en imagerie médicale, à une autre contrainte : le temps minimum d'acquisition. D'abord simplement parce que le temps d'acquisition revêt une plus grande acuité lorsque c'est un humain et non un tube à essai qui est au centre de l'aimant. Mais aussi parce que c'est au minimum une acquisition à trois dimensions, les trois dimensions de l'espace ordinaire, qui est à réaliser ! Ceci est à mettre en contraste avec la spectroscopie classique qui est à une dimension (1D) le long de l'axe de déplacement chimique (remplacé en imagerie par l'axe dit de lecture ou d'encodage en fréquence). Il est vrai que déjà aux débuts de l'IRM, la spectroscopie était déjà 2D, la deuxième dimension étant le couplage J mis en évidence par un temps d'évolution variable modulant la phase du signal : c'est d'ailleurs la transposition de ces idées de modulation de phase appliquée à la deuxième dimension de l'espace par une impulsion de gradient variable, [**7, 8**] qui va rendre l'imagerie suffisamment robuste pour être cliniquement applicable (imagerie 2DFT ou 3DFT). Mais jamais, la spectrocopie ne s'était trouvée devant la nécessité de réduire le temps total d'acquisition. Or, en ce qui concerne l'imagerie 3D, un simple calcul montre que l'acquisition d'une image 3D, sans réduction du volume, par la méthode Kumar-Welti-Ernst [**7**], ou pire encore par la méthode originelle de rétro-projection proposée par Lauterbur [**9**], nécessite une à quelques heures d'acquisition, tout au moins dans le cas où on cherche une image pondérée en T2 et des résolutions de un à deux millimètres dans un champ de vue d'une quarantaine de centimètres.

La méthode la plus directe pour réduire le temps minimum d'acquisition est de réduire le volume à reconstruire en n'excitant qu'une portion de l'espace, et en recueillant les signaux ainsi générés, pendant que le complémentaire de cette portion, non perturbé, voit son aimantation longitudinale repousser par relaxation. On arrive ainsi à exciter en permanence le milieu et, réduisant le nombre d'inconnues dans chaque portion de l'espace, à réduire le temps d'acquisition minimum à quelques dizaines de minutes. L'IRM est donc impulsionnelle, mais les impulsions y sont sélectives : elles n'excitent qu'une région bien définie de l'espace. Durant les années 1970 les pionniers de l'imagerie ont sélectionné des lignes, ou même des points [**10, 11, 12, 13, 14**] en utilisant, compte tenu de la technologie de l'époque, une impulsion radio-fréquence carrée comme en spectroscopie, mais de durée allongée de façon à réduire la bande de fréquences de résonance où l'excitation est efficace.[1]

Précisons un peu le principe de ces sélections élémentaires. L'approximation linéaire des équations de Bloch prédit que l'aimantation transversale, à la fin de l'excitation , est la transformée de Fourier (TF) de l'enveloppe de la radio-fréquence (voir par exemple, dans le contexte de la sélection de coupe en IRM, [**15**]). Augmenter la durée de l'impulsion permet de réduire de façon inversement proportionelle la bande de protons basculés. Le branchement d'un gradient de champ statique, ou de façon un peu plus compliquée, dynamique, permet de faire correspondre cette bande de fréquences de résonance avec une distance spatiale le long d'une ou de plusieurs directions. Cependant, la transformée de Fourier d'une

[1]Ce type d'impulsion carrée allongée est parfois dénommée impulsion "douce"("soft pulse"). Cependant le terme est devenu ambiguë car il a aussi désigné les impulsions sélectives continues qui nous intéressent dans ce chapitre, elles-mêmes dénommées "taylored pulses" dans la littérature de langue anglaise, sans doute pour tenter de lever l'ambiguïté (devrions-nous dire "impulsions élaborées" ?)

impulsion carrée reste un sinus cardinal. Ce sinus cardinal a des lobes secondaires dont l'amplitude est très importante ; par exemple le premier lobe secondaire atteint le cinquième de l'amplitude du lobe principal. L'utilisation d'une impulsion carrée pour sélectionner un stylet (une dimension) ou une coupe (deux dimensions) est donc assez risquée, de par la saturation de l'aimantation des volumes adjacents que de tels rebonds induisent, mais aussi et surtout par le déclenchement d'échos secondaires ou stimulés, source d'artefacts dans le cas d'excitations répétées. De façon encore plus évidente, l'utilisation d'une impulsion carrée pour sélectionner un volume 3D est simplement à exclure car elle entraînerait des artefacts de repliement de l'ordre de 20% entre chacun des bords du volume après reconstruction ! Cependant, toujours en se laissant guider par le fait que, d'après le modèle linéaire, l'aimantation transversale est la transformée de Fourier de l'excitation, on peut avoir l'idée d'émettre une onde ayant pour forme temporelle la transformée de Fourier inverse d'une coupe idéale carrée. On pré-compense en quelque sorte les imperfections [**16, 17**]. On doit donc émettre un sinus cardinal, transformée de Fourier inverse du carré. Bien sûr, le temps imparti étant fini, la réponse des protons ne sera pas limitée à la bande de fréquences utiles ("pass-band") prédéfinie, mais apparaîtra une zone de transition (transition band), et de plus quelques rebonds d'excitation ("ripples") seront visibles dans la bande affaiblie (stop-band). Cependant et de façon classique en traitement du signal, on pourra réduire ces rebonds par application d'une fenêtre ('windowing'). Il est aussi nécessaire de gérer le déphasage linéaire dû au retard entre l'excitation et le début de la lecture : si en spectroscopie, il n'est pas possible d'éliminer ce déphasage autrement que par une impulsion de refocalisation, en imagerie on peut, au moins de façon approximative et si on néglige l'influence des défauts d'homogénéité du champ central, remettre en phase les protons par une inversion du gradient de sélection [**18**]. On en arrive donc finalement au schéma de principe de la Figure (1) tirée de [**16**], décrivant une impulsion de basculement à 90 degrés et le décourt temporel du gradient de sélection associé. Ce schéma est encore, dans ses grandes lignes, valable aujourd'hui ! Il est peut être aussi intéressant de noter que la fin des années 70 voit l'apparition de circuits intégrés multiplicateurs analogiques (modulateurs) de très bonne linéarité dans les fréquences vidéo, rendant l'idée d'une modulation par une forme élaborée facile à mettre en oeuvre. Ainsi, couplée à l'autre progrès fondamental qui est l'encodage conjoint en fréquence et en phase (Imagerie 2D ou 3DFT) [**7, 8**], ce type de sélection de coupe a posé dans le début des années 80 les fondations de l'IRM telle que nous la connaissons. C'est aussi à cette époque que quelques résultats cliniques [**19**] ont décidé les constructeurs d'appareils d'imagerie à se lancer dans la bataille, au sens plein du terme, de l'IRM.

Cependant une difficulté, au moins, restait à surmonter : l'approximation linéaire n'est qu'une approximation, sans doute acceptable pour des angles de nutation inférieurs à 30°. Cette approximation est sujette à caution pour des nutations de 90° et devient tout à fait inapplicable pour des impulsions de refocalisation ou d'inversion qui nécessitent des angles de l'ordre de 180 degrés. Pour démonstration, la figure (2) montre le profil de coupe généré par une modulation en temps composée d'un sinus cardinal possédant deux lobes secondaires, lui même multiplié par une une fenêtre de Hanning. Cette impulsion est ici utilisée

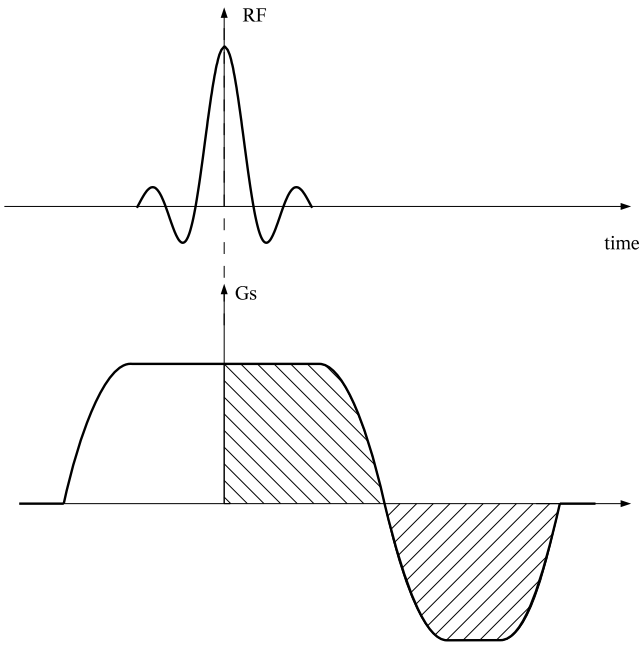

FIG. 1. Principe de la sélection de coupe en IRM : une impulsion à bande étroite, ici un sinus cardinal tronqué, est émise en présence d'un gradient du champ central, dit gradient de sélection, perpendiculaire au plan de la coupe. A l'intérieur de la bande de fréquence excitée, tout se passe ici comme si l'aimantation avait été basculée, très approximativement, au centre temporel de l'impulsion RF. La phase de l'aimantation est donc dispersée à la fin de l'impulsion ; on peut remettre en phase l'ensemble des aimantations basculées par un gradient de rephasage négatif ; ceci aux termes de phase non linéaires près, mais aussi et surtout à l'influence de la non homogénéité du champ central, non compensable par l'inversion de gradient.

d'abord en basculement avec un angle de nutation de 10 degrés, puis avec un angle de 90 degrés et enfin en impulsion de refocalisation de Spin Echo avec un angle de nutation de 180 degrés. La dégradation évidente du profil de coupe est due, d'une part à changement de paramètre utile entre les utilisations possibles d'une même impulsion (bascule, refocalisation) mais surtout à la non linéarité intrinsèque des équations de Bloch, qui se manifeste d'autant plus que l'angle de nutation est élevé.

Or une bonne sélectivité de tous les types d'impulsions conditionne en grande partie la qualité des images obtenues. Par exemple, et en se référant à la figure (2), on s'aperçoit que la perte de sélectivité de la même impulsion utilisée en refocalisation s'accompagne d'une réduction d'un facteur important de la bande à mi-hauteur ('FWHM' : Full Width Half Maximum en anglais). Dans le but d'adapter l'épaisseur des coupes sélectionnées par la 90 degrés et la 180 degrés, on peut être tenté d'utiliser un gradient de sélection moindre pendant la 180 degrés (figure (3)). Cette solution, qui ne résout de toute façon pas la dégradation de la forme du profil de coupe de la refocalisation, présente de plus une erreur

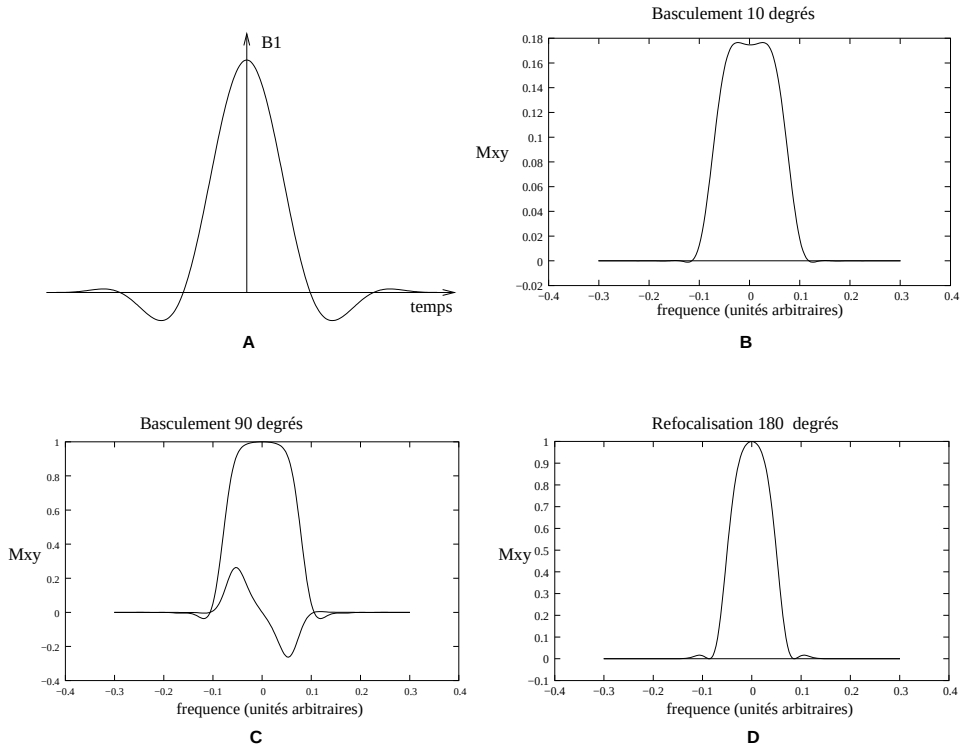

FIG. 2. Le même sinus cardinal à deux lobes secondaires, multiplié par un Hanning (A), est utilisé successivement, par simple changement d'amplitude, en bascule avec un angle de nutation très faible de 10 degrés (B), puis avec un angle de 90 degrés (C), mais aussi comme impulsion de refocalisation à 180 degrés (D). En ce qui concerne l'utilisation en bascule, on a appliqué un gradient de rephasage qui compense l'intégrale du gradient de sélection depuis le centre temporel de l'impulsion. Dans ces conditions il n'y a aucune différence visible entre le profil à faible nutation B et la simple transformée de Fourier du décourt temporel A. Lorsqu'on augmente l'angle de nutation le profil se déforme, devenant moins trapézoïdal, le gradient de refocalisation devrait être légèrement augmenté (en valeur absolue) pour compenser le déphasage et une très légère non linéarité de phase apparaît. Pour le profil de l'impulsion de refocalisation, on a supposé une répartition uniforme en fréquence et en phase avant la 180 degrés (c'est à dire telle que générée par une 90 degrés dure suivie d'un déphasage pur) et on a supposé la présence de gradients "d'écrasage" (crushers) avant et après la 180 degrés, éliminant les signaux parasites (voir Figure (3)).

de raisonnement subtile mais à l'effet qui peut être dévastateur. En présence de non homogénéité de champ, les deux coupes sélectionnées respectivement par l'impulsion 90 degrés et par l'impulsion 180 degrés ne sont plus les mêmes, résultant en une atténuation, voire une annulation du signal, comme expliqué sur la figure (4), aux endroits où l'homogénéité du champ central n'est pas suffisante. Or il ne faut pas oublier que le champ central est influencé par le patient lui-même car il y a jusqu'à 10 ppm (parties par millions) de différence de susceptibilité magnétique entre l'eau et l'air. Ainsi de nombreux examens cliniques des débuts présentaient dans les acquisitions en Spin Echo une chute du niveau de gris et une

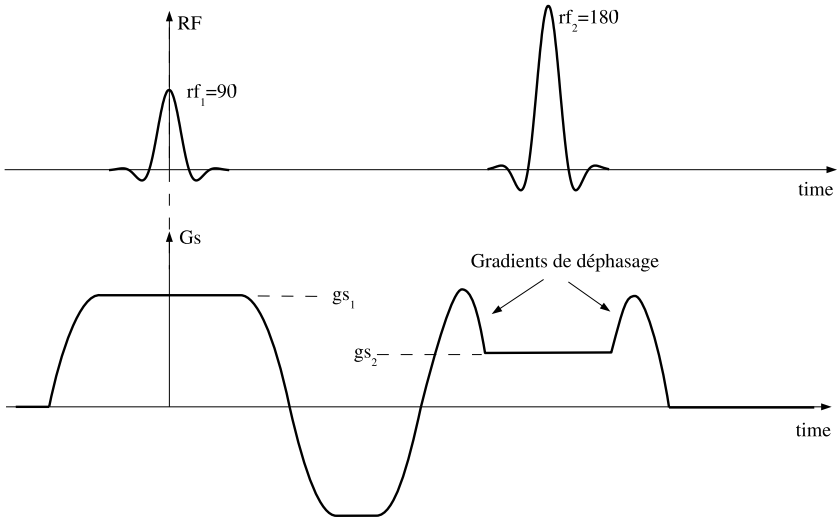

FIG. 3. Diagramme typique de la RF et du gradient de sélection dans une séquence d'écho de spin. Le manque de sélectivité et la réduction de bande passante d'une impulsion de refocalisation non optimisée, peut pousser à vouloir utiliser pendant cette impulsion de refocalisation un gradient de sélection plus faible que celui utilisé pendant le basculement. Ceci est une erreur, comme expliqué figure (4).

lobes secondaires	nutation	Champ RF (gauss)	Bande à mi-hauteur (kHz)
2	10	0.0089	1.367
2	90	0.0806	1.443
2	180	0.1613	0.918
1	90	0.0526	1.000

TAB. 1. Bande passante à mi-hauteur d'impulsions sinus cardinal, d'abord avec deux lobes secondaires pour différentes utilisations, lignes 2 à 4 , puis avec un seul lobe secondaire utilisé en basculement à 90 degrés, ligne 5. Toutes ces impulsions durent 4.4 ms. Dans ces conditions, la refocalisation (à 2 lobes, avant dernière ligne) et le basculement à 1 lobe, dernière ligne, ont pratiquement la même bande passante.

perte de contraste à proximité d'une interface eau-air (coupes extrêmes, bord de champ, fosses nasales...).

On en déduit qu'il est absolument nécessaire d'utiliser la même valeur de gradient de sélection pour toutes les impulsions participant à la sélection d'une coupe donnée, que ces impulsions soient de basculement, de refocalisation ou même d'inversion ou de saturation. De fait, ce sont alors les impulsions de refocalisation, ou d'inversion, qui sont critiques et imposent les paramètres de la coupe sélectionnée. En effet l'impulsion à 180 degrés impose la largeur de bande à mi-hauteur de toutes les impulsions car c'est elle qui demande

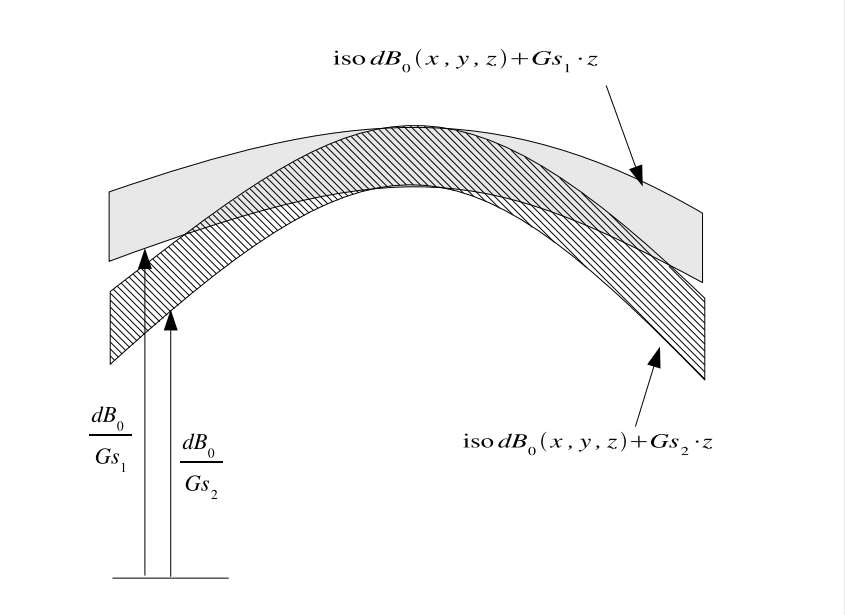

FIG. 4. Une impulsion RF ne peut sélectionner que des bandes d'iso-fréquences de résonance. Or la fréquence de résonance, proportionelle au champ local est aussi influencée par les défauts d'homogénéité du champ, fussent-ils dus à l'aimant, au décalage chimique ou à la susceptibilité magnétique (il peut y avoir 10ppm de variation de champ près d'une interface air-eau). En conséquence, ce n'est pas un plan, ou ensemble de plans, qui est sélectionné mais une surface, ou un ensemble de surfaces courbes d'autant plus déformées que la variation de champ central dB_0 est importante et que le gradient de sélection originel, G_s, est faible . C'est ainsi que lorsque les gradients de sélection utilisés ne sont pas constants d'une impulsion à l'autre, les surfaces sélectionnées sont différentes.

la plus grande amplitude de champ RF, à durées d'impulsion sensiblement égales. Il faut peut être mentionner que si le champ RF maximum utilisable sur un système d'imagerie corps entier n'est peut-être pas une donnée intangible, il en tout cas difficile à augmenter pour des raisons de coût mais aussi d'énergie déposée dans le patient. Pour fixer les idées, les champs RF maximum utilisables sont de l'ordre de 0.15 à 0.25 gauss sur un système de champ central 1.5 teslas lorsque l'acquisition s'effectue en corps entier. Or, pour une impulsion de forme fixée comme la sinus cardinal de la figure (2), le champ RF maximal est proportionnel à la bande passante et à l'angle de nutation ; par ailleurs, et bien évidemment, à forme donnée la bande passante est inversement proportionnelle à la durée de l'impulsion. Ainsi il est nécessaire de fixer une durée de 4.4 ms si l'on veut que le champ RF maximum soit inférieur ou égal à 0.16 gauss dans le cas du sinus cardinal, à deux lobes secondaires, utilisé en refocalisation tel que sur la figure (2). Dans ces conditions, la bande à mi-hauteur de la 180 degrés n'est que de 918 Hz, à comparer à la bande à petits angles qui est de 1367 Hz pour la même impulsion (table (1)). Cette bande est même légèrement plus grande lorsque ce sinus cardinal est utilisé en bascule à 90 degrés. Si on impose maintenant

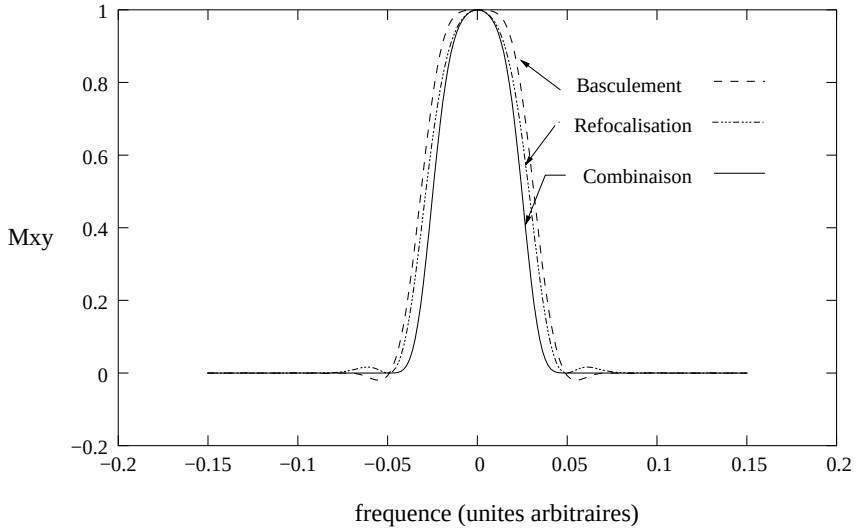

FIG. 5. Le profil de refocalisation étant donné, l'obligation d'obtenir une bande passante du basculement du même ordre de grandeur, tout en gardant a priori une durée d'émission constante, rend ce profil de basculement presque aussi peu sélectif que le profil de refocalisation. Le profil résultant de la coupe au premier écho étant le produit de ces deux profils élémentaires, il en est d'autant plus dégradé.

d'utiliser la même amplitude de gradient pour toutes les impulsions, il faudrait dilater cette dernière impulsion de bascule jusqu'à 6.4ms, de manière à présenter une bande passante du même ordre de grandeur que la bande passante de l'impulsion de refocalisation. Ceci est clairement rédhibitoire. Un compromis peut cependant être trouvé, et on préfère utiliser comme bascule une forme de sinus cardinal avec un seul lobe secondaire, ramenant sa durée à 4.4ms. Mais le profil de coupe du basculement est alors lui aussi dégradé, accentuant la dégradation du profil 'effectif' de coupe. En effet le profil 'effectif' ou vu[2] au premier écho est le produit des deux profils élémentaires, basculement et refocalisation. Ces profils sont présentés sur la figure (5). Avec de tels profils, il est difficile d'exciter des ensembles de coupes jointives. On doit acquérir seulement une coupe sur deux, obligeant à réaliser deux acquisitions successives pour couvrir tout le volume par entrelacement de deux peignes de coupes. D'autre part, l'absence d'une bande passante bien définie entraîne une variation de contraste car pratiquement tout le profil de coupe est constitué de deux bandes de transition où l'angle de nutation est variable. Ceci influence la repousse de l'aimantation entre deux excitations, et induit un contraste en T_1 variable. Il est également difficile de caractériser les acquisitions à contraste T_2 ou en densité ρ, acquises avec un temps de répétition long vis à vis du T_1 , sauf à admettre des temps de répétition réellement très longs, au dessus de quatre secondes.

[2]On obtient réellement une 'image' du profil de coupe en utilisant un objet composé d'une fine lame d'eau incliné à 45 degrés dans un volume d'air.

C'est pourquoi pendant quelques années, la définition d'une impulsion de refocalisation, mais aussi, dans une moindre mesure, d'inversion, possédant une sélectivité équivalente aux impulsions de basculement, a constitué un objet de recherche active [**20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27**]. La plupart des travaux sur les impulsions sélectives ont reposé sur la simulation de la réponse des protons par les équations de Bloch et l'utilisation de techniques d'optimisation paramétriques. Brossons les grandes lignes d'une telle approche, ce qui va aussi permettre de définir quelques notations.

Dans le repère tournant, défini par la porteuse des ondes radio fréquence d'émission, et pour un décalage de pulsation de résonance ω provenant du déplacement chimique ou plus probablement en IRM d'un gradient de champ central, on étudie l'influence d'un champ radio fréquence ayant les composantes b_{1x},b_{1y}. Ce champ radio fréquence crée des vitesses de nutation $-\omega_{1x} = -\gamma b_{1x}$, $-\omega_{1y} = -\gamma b_{1y}$, qui s'ajoutent à la précession autour de l'axe z de vitesse angulaire $-\omega = -\gamma dB_0$ si dB_0 est le champ central au point étudié, après soustraction du champ central correspondant à la porteuse. Notons que le rapport gyro-magnétique γ est considéré ici comme positif et que nous choisissons d'avoir des valeurs de fréquence angulaire ω,ω_{1x},ω_{1y} positives pour des champs magnétiques positifs, et que donc le sens de rotation du proton est pris en compte dans les équations de rotations en insérant explicitement le signe " -". On suppose que les composantes ω_{1x} et ω_{1y} sont variables dans le temps et s'écrivent $\omega_{1x}(t)$, $\omega_{1y}(t)$ pour le temps $0 < t < D$, où D est la durée de l'impulsion radio fréquence. Par contre et pour simplifier, on considérera ω comme un paramètre qui reste fixe dans le temps. Ceci correspond par exemple à l'application d'un gradient de champ central constant pendant la durée de l'émission. Les équations de Bloch, si les relaxations sont négligées, représentent simplement la rotation instantanée, combinaison de la vitesse de précession de Larmor $-\omega$ et des vitesses de nutation $-\omega_{1x}$,$-\omega_{1y}$. Donc et au temps t après le début de l'impulsion, l'équation du mouvement de l'aimantation s'écrit :

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} \dot{m}_x \\ \dot{m}_y \\ \dot{m}_z \end{bmatrix}_{(t)} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & -\omega_{1y}(t) \\ -\omega & 0 & \omega_{1x}(t) \\ \omega_{1y}(t) & -\omega_{1x}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}_{(t)}$$

où m_x,m_y,m_z sont les coordonnées de l'aimantation $\vec{M}(\omega,t)$ dans le repère tournant, $\dot{m}_x$, $\dot{m}_y$, $\dot{m}_z$ sont leurs dérivées temporelles. On définit un ensemble discret $\omega = \omega_k$ pour $k = 1, K$, de pulsations de résonance ω pour lesquelles on va simuler la réponse temporelle de l'aimantation. Il faut ensuite définir, ou paramétrer, d'une manière ou d'une autre le décourt temporel de la RF $\omega_{1x}(t)$, $\omega_{1y}(t)$. La caractérisation sans doute la plus simple et la plus immédiate est de décomposer chacune de ces deux fonctions temporelles sous forme de fonctions en escalier, où chaque marche a une durée T, ce qui permet de caractériser la RF par deux suites de valeur $\omega_{1x}(iT)$, $\omega_{1y}(iT)$, représentant la hauteur de chacune des marches, pour les deux composantes de l'excitation. On obtient ainsi deux suites de d réels si d est l'entier tel que $dT = D$. On utilisera aussi, pour alléger l'écriture, la suite

$$\omega_1(iT) = \omega_{1x}(iT) + j\omega_{1y}(iT), \quad i = 1,d, \tag{2}$$

$\omega_1(t)$ étant alors la valeur complexe du champ radio fréquence dans le plan x,y du repère tournant au temps t. Il faut faire attention au fait que si la représentation sous forme de fonction escalier peut correspondre au processus d'échantillonnage suivi du blocage d'ordre zéro avec une période constante T, tel qu'effectué sur un calculateur, nous décidons cependant de découpler cette représentation de toute réalisation technique. On doit plutôt considérer ce modèle comme un moyen d'approcher n'importe quelle fonction continue, à deux composantes. En effet on peut admettre que si on fait tendre $T \to 0$ (ou $d \to \infty$ à D fixé) on peut approcher n'importe quelle fonction continue : nous laissons aux vrais mathématiciens la responsabilité de la démonstration, mais essentiellement dans la définition d'une fonction continue où pour toute erreur ε on peut trouver un η tel que $\mid f(x+\eta) - f(x) \mid < \varepsilon$ il suffit d'identifier la période d'échantillonage T de la fonction en escalier avec η. D'ailleurs on remarque que si au niveau du convertisseur digital analogique on peut considérer qu'on a affaire à une fonction en escalier, le filtrage analogique effectué en aval, ne serait-ce que par le circuit d'antenne, ramène rapidement à un signal continu. C'est ce signal continu représentant le champ tournant ω_1 que nous représentons ici par une fonction en escalier aussi fine que voulue. L'intérêt essentiel de cette caractérisation sous forme de fonction échantillonnée-bloquée du signal d'émission est qu'il permet une simulation *exacte* de la réponse de chaque élément d'aimantation. C'est d'ailleurs sans doute la seule caractérisation du signal, mis à part une autre encore plus simple que nous introduirons au prochain paragraphe, qui permette une telle intégration numérique exacte des équations (1). En effet dans chaque intervalle de temps $[iT,(i+1)T[$ l'axe de la rotation représentée par (1) est constant. La vitesse angulaire de rotation a comme valeur

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_{1x}^2(i) + \omega_{1y}^2(i)}, \tag{3}$$

quand à l'axe c'est le vecteur unitaire de coordonnées

$$\vec{U}(i) = \frac{1}{\Omega} \begin{bmatrix} -\omega_{1x}(i) \\ -\omega_{1y}(i) \\ -\omega \end{bmatrix}. \tag{4}$$

La rotation résultante dans l'intervalle de temps T s'écrit sous forme d'une matrice 3x3 dont toutes les composantes sont obtenues en décomposant l'aimantation parallèlement et perpendiculairement à l'axe de rotation. Les coefficients réels de la matrice de rotation sont ainsi obtenus de manière analytique, bien qu'ils soient d'écriture assez lourde (l'écriture sous forme de spineurs sera, par contraste, immédiate). En tout état de cause on peut écrire la relation entre la valeur de l'aimantation au début de l'intervalle, au temps $t = iT$ et sa valeur à la fin de l'intervalle, $t = (i+1)T$ sous forme matricielle :

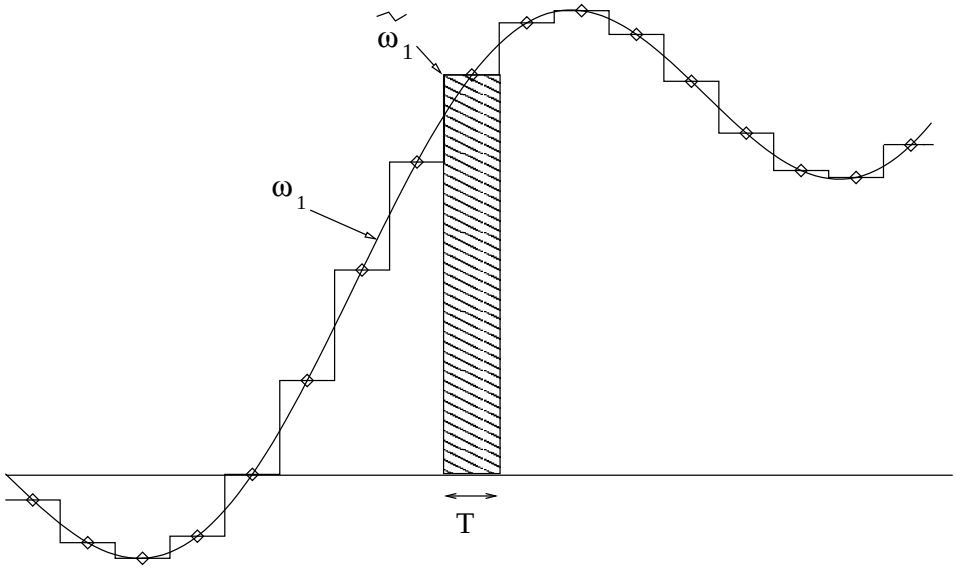

FIG. 6. Le signal continu $\omega_1(t)$, représenté ici par une de ses deux composantes, est approché par un signal en escaliers (ou constant par morceaux, ou bloqué à l'ordre zéro) qui garde la même valeur pendant des intervalles de temps successifs de durée T, cette valeur étant par exemple la valeur de la fonction continue au milieu de chacun des intervalles. Lorsque T diminue et que le nombre d'intervalles augmente les deux signaux ω_1 et $\tilde{\omega}_1$ convergent l'un vers l'autre, et on peut admettre qu'il en est de même des réponses des aimantations. Pendant chacun des intervalles de durée T l'axe de la rotation subie par un élément d'aimantation est constant et on peut écrire analytiquement son évolution. La composition des rotations permet d'obtenir numériquement de façon exacte l'évolution sous l'influence du signal en escaliers.

$$\vec{M}((i+1)T,\omega) = R(\omega,\omega_1(i))\vec{M}(iT,\omega) \tag{5}$$

où $\vec{M}(\omega)$ est le vecteur aimantation à trois dimensions (de coordonnées m_x, m_y, m_z) à la fréquence de résonance ω et où R est la matrice de rotation 3x3. Il reste à effectuer l'intégration numérique, à ω fixé, pour tous les temps $t = (i+1)T$, en appliquant de façon récurrente l'équation (5) à partir de la condition initiale $\vec{M}(0,\omega)$. Dans la suite, l'aimantation au temps iT , $M(iT,\omega)$ sera notée $M(i,\omega)$ rendant la période d'échantillonage implicite. On effectue cette intégration pour l'ensemble des vitesse angulaires de résonance $\omega = \omega_k$, $k = 1,K$. On obtient ainsi l'aimantation finale $M(d,\omega_k)$, pour l'excitation donnée $\omega_1(i)$, par un nombre d de multiplications de matrices réelles 3×3, pour chacune des pulsations de résonance ω_k. Il faut ensuite définir une fonction objectif ou de coût ou encore "critère" qui permette d'évaluer l'adéquation entre l'aimantation résultante et l'aimantation désirée à la fin de l'impulsion $J(M(d,\omega_k))$. On peut utiliser ensuite l'un des algorithmes classiques d'optimisation paramétrique où les paramètres sont les $\omega_1(i)$. Il s'avère que le choix du critère d'adéquation est des plus délicats.

On peut se contenter d'un critère terminal, comparant uniquement l'aimantation finale à l'aimantation désirée, puisque c'est effectivement ce qui nous intéresse dans le cas d'une impulsion sélective : les états intermédiaires de l'aimantation durant l'impulsion RF ne nous importent guère puisque nous n'y mesurons pas le signal. Mais ne doit-on pas ajouter un terme relatif par exemple à l'énergie déposée ? Aussi, on sait qu'un critère quadratique constant ne donne pas nécessairement, même dans le cas d'un système linéaire, des réponses adéquates et on préfère un critère min-max (minimisation du maximum de l'erreur) mais que celui-ci est souvent difficile à minimiser, en particulier si le système est non linéaire vis à vis des paramètres. On peut le remplacer par un critère quadratique avec un poids variable, mais lequel ? Encore plus fondamentalement, que prendre comme aimantation désirée à la fin de l'impulsion ? Cette question peut paraître triviale, cependant il n'est pas évident que toute répartition d'aimantation soit atteignable à la fin de l'impulsion. Ainsi une des premières questions qui se pose lors de la définition d'une impulsion de bascule est quelle phase de l'aimantation transversale finale doit-on chercher à approcher ? L'imposition d'une phase nulle, qui est naïvement ce que l'utilisateur préférerait à la fin de l'impulsion, conduit à une modulation comportant deux impulsions dures (impulsion de Dirac) et donc d'énergie infinie. Sans aller jusqu'à cet extrême, l'imposition d'une phase linéaire, susceptible d'être compensée par un gradient de rephasage tel que sur la figure (3) pose encore la question de la pente de cette phase linéaire. Et même lorsque l'on croit connaître la réponse, par exemple en mettant en recherche, sous forme d'un paramètre supplémentaire, la pente finale de la phase, on s'aperçoit qu'il faudrait ajouter des termes d'ordre supérieur à l'ordre un, si on ne veut pas que l'amplitude de l'aimantation ne pâtisse de ce modèle de phase par trop irréaliste. Mais comme déjà démontré, c'est le cas de l'impulsion de refocalisation qui représente le cas difficile mais important à résoudre car il y a nécessité de prendre en compte l'effet non linéaire des équations de Bloch et les résultats obtenus conditionnent la spécification de l'ensemble des autres impulsions. Donc, comment écrire le critère d'adéquation $J(M(d,\omega_k))$ dans le cas d'une refocalisation ? Ou comment écrire le fait que l'on veuille que toute aimantation transversale $M_X(0) = m_x(0) + jm_y(0)$ soit transformée en son complexe conjugué après l'impulsion $M_X(D) = m_x(0) - jm_y(0)$ lorsque cette aimantation est à l'intérieur de la bande passante, mais qu'elle reste non affectée et donc reste déphasée lorsque l'aimantation est dans la bande affaiblie ? Il y a donc deux conditions initiales possibles à prendre en compte avec un état final dépendant et de la fréquence de résonance considérée et de la condition initiale. Par voie de conséquence, c'est la rotation totale, $\mathcal{R}(d,\omega)$ et non juste une aimantation, en chaque fréquence de résonance qu'il faut considérer comme variable d'état

$$\mathcal{R}(d,\omega) = R(\omega,\omega_1(d))R(\omega,\omega_1(d-1))\ldots\ldots R(\omega,\omega_1(1)). \tag{6}$$

De plus il faut caractériser cette rotation par un critère qui va faire intervenir par exemple, de façon variable suivant ω, les quatre composantes de la sous-matrice de dimensions

(2,2) caractérisant le transfert de $M_X(0)$ à $M_x(D)$. Cette tache n'est a priori pas impossible, mais à l'évidence pas facile non plus. L'approche par optimisation paramétrique [**20, 21, 22, 23, 25, 26, 27**], ou l'approche par commande optimale [**24**], toutes deux utilisant l'aimantation comme vecteur d'état, ont rencontré de grandes difficultés à générer des impulsions de refocalisation, justement à cause du tâtonnement demandé par la définition du critère d'adéquation. Les meilleurs résultats obtenus par cette approche 'classique' ont été publiés en 1986 ou 1987 [**24, 27**] et, pour les dernières, s'approchent des résultats obtenus par SLR mais au prix d'une complexité bien plus grande. A cette époque la solution SLR existait, si ce n'est de façon publique [**28, 29, 30**] et détaillée [**31, 32, 33**], au moins sous forme de documents de propriété industrielle [**34**]. L'algorithme utilise l'écriture des rotations sous forme de spineurs qui permet de caractériser simplement la rotation finale, tout en permettant évidemment de simplifier la composition de rotations successives. En ce sens, caractériser une impulsion de refocalisation ne sera pas plus difficile que de caractériser une impulsion de basculement, car en chaque fréquence ω, ce sera la rotation $\mathcal{R}(d,\omega)$ qui sera décrite par simplement deux nombres complexes $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$.

L'autre ingrédient consiste en l'approximation par impulsions dures ('hard pulse'), ou de façon plus descriptive en l'approximation d'une fonction continue par un *train* d'impulsions de Dirac qui permet l'usage de transformées en Z .

Avant de présenter ces deux facettes de l'algorithme *SLR* on notera qu'elles sont toutes les deux indispensables comme le prouvent des publications comme [**35**] qui emploie l'approximation par train d'impulsions mais pas les spineurs ou comme [**36**] qui emploie les quaternions mais ne passe pas à la transformé en Z. Enfin et pour terminer le survol historique on remarquera que les impulsions sélectives ont assez rapidement été utilisées également en spectroscopie pure, en dehors ou en addition de la sélection de volume, comme par exemple dans [**37, 38**].

2. Représentation des rotations sous forme de spineurs.

Il n'y a, pour le praticien, aucune différence entre les spineurs [**39, 40**] et les matrices SU2 (special unitary group) [**41, 42, 43**]), ou entre un spineur et le vecteur d'état solution de l'équation de la mécanique quantique pour un système quantique à deux niveaux [**40, 41, 44**], ou même entre une matrice SU2 et ce que certains appellent un quaternion [**45, 46, 47**], lorsque celui-ci est à composantes réelles [**48**]. Or ce dernier outil est utilisé de nos jours en enginerie informatique (par exemple) pour représenter des rotations [**46**] de l'espace ordinaire à trois dimensions. C'est la même vision très pragmatique qui sera adoptée ici, en donnant la primauté à la représentation légère du quaternion sous forme SU_2 ou spineur, deux nombres complexes en lieu et place de la représentation sous forme de quatre nombres réels, et de matrices réelles 4 par 4, parfois adoptée. Ce parti pris de simplicité entraîne qu'aucun argument quantique ne sera avancé, sauf par référence, alors qu'il sera fait un usage éhonté des notations et résultats mathématiques de cette même mécanique quantique. L'exposé sera descriptif et sans souci d'une démarche introductive qui soit logique ; au contraire les résultats seront présentés d'emblée avec quelques exemples de justification.

Le lecteur intéressé pourra se reporter aux textes de cours classiques [**40, 41, 44, 49, 50**] s'il veut une meilleure compréhension de la genèse de cet outil ou plus d'approfondissements. Il est à l'inverse entendu que l'auteur ne remet pas en cause ici la nature quantique du phénomène RMN. Cependant dans les conditions de l'imagerie, les équations de Bloch s'appliquent parfaitement et la vision classique est suffisante. Mais ces équations de Bloch, si on néglige l'effet des relaxations dans le temps d'une impulsion de sélection, sont en fait l'équivalent de l'équation de la matrice densité en Mécanique quantique. Et il se trouve que cette factorisation des équations de Bloch amène à un développement beaucoup plus léger que les équations originales de l'espace ordinaire. Donc nous utilisons les outils de la mécanique quantique sur un objet macroscopique, par simple opportunisme, sans oublier le caractère quantique du phénomène sous-jacent dont nous ne nous préoccuperons cependant pas. Par ailleurs, on peut noter que l'invention du quaternion est antérieure à la mécanique quantique puisqu'elle est due à Hamilton et correspondait bien à la représentation de rotation dans l'espace ordinaire.

Une matrice SU2 est une matrice 2x2 à composantes complexes et de la forme :

$$Q(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \tag{7}$$

avec la contrainte de normalisation

$$|\,\alpha\,|^2 + |\,\beta\,|^2 = 1. \tag{8}$$

Cette matrice ne dépend donc que d'un couple de nombre complexes (α,β) ; ce couple, formé des composantes de la première colonne de la matrice Q, peut être appelé un spineur (de Pauli). Notons qu'à cause de la contrainte de normalisation des quatre réels qui composent ces deux complexes $\alpha = \alpha_r + j\alpha_i$, $\beta = \beta_r + j\beta_i$, seuls trois d'entre eux (par exemple α_i,β_r, et β_i) sont libres, le quatrième (α_r par exemple) en étant déduit à un signe près. La matrice Q représente une rotation. Ainsi étant donné une rotation, notée formellement $\mathcal{R}(\Theta,\vec{n})$, d'angle Θ autour d'un axe *unitaire* $\vec{n}$ de composantes n_x, n_y, n_z (avec $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$), sa représentation sous forme d'une matrice Q est

$$Q(\Theta,\vec{n}) = c\,\mathbf{1} - js\,(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z), \tag{9}$$

en notant $c = \cos(\Theta/2)$ et $s = \sin(\Theta/2)$, avec les matrices élémentaires, dites de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

et avec $\mathbf{1}$ la matrice unité de dimension 2x2. Ainsi donc l'angle de rotation Θ et l'axe de la rotation apparaissent directement dans l'écriture de la matrice Q , tout au contraire des matrices réelles 3x3 exprimant le changement de repère dans une rotation de l'espace

ordinaire (groupe O_3). Par identification entre (7) et (9) on a en effet

$$\begin{aligned} \alpha &= c - jsn_z \\ \beta &= -js(n_x + jn_y)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Où l'on voit qu'hormis la partie réelle de α , qui est le cosinus de la moitié de l'angle de rotation, les autres composantes sont les coordonnées de l'axe de la rotation multipliées par un scalaire $j\sin(\Theta/2)$.

Il existe bien sûr une liaison entre la représentation par quaternion (ou spineur, ou matrice SU_2) et la représentation dans O_3. Il faut pour cela admettre qu'un vecteur $\vec{v}$ de composante x, y, z dans l'espace ordinaire est représenté par la matrice 'vecteur' :

$$V = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{bmatrix} z & x - jy \\ x + jy & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & \bar{X} \\ X & -z \end{bmatrix} \tag{12}$$

avec la notation $X = x + jy$. Alors si dans l'espace ordinaire le vecteur $\vec{v}$ est transformé par la rotation $\mathcal{R}(\Theta, (\vec{n}))$ en $\vec{v^+}$, ce vecteur sera représenté par la matrice V^+ obtenue à partir de V par

$$V^+ = QVQ^* \tag{13}$$

où Q^* est la matrice transposée conjuguée de Q. Le lecteur versé en mécanique quantique reconnaîtra l'équation d'évolution de la matrice densité, où alors V représente la matrice densité et Q est la matrice d'évolution de Schrödinger. Nous admettrons cette relation, bien qu'à partir de la définition (9) et (10) il soit possible de la démontrer. Nous ne ferons dans la suite que la vérifier en retrouvant l'expression d'une rotation dans O_3. Par contre à partir de (13) il est facile de montrer que la composition $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ de deux rotations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, ayant comme représentations respectives Q_1et Q_2, a elle même comme représentation la matrice produit $Q = Q_2Q_1$. En effet, en appliquant deux fois de suite la relation (13) on obtient comme matrice vecteur représentative du résultat de la combinaison des deux rotations
,

$$V^+ = Q_2(\overbrace{Q_1 V Q_1^*}^{\mathcal{R}_1})Q_2^*, \qquad \overbrace{\qquad\qquad}^{\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1} \tag{14}$$

ce qui peut être regroupé différemment sous la forme

$$V^+ = (Q_2Q_1)V(Q_2Q_1)^*. \tag{15}$$

Ce qui démontre que la combinaison de deux rotations a comme quaternion représentatif le produit des matrices quaternions, $Q = Q_2Q_1$. En explicitant le produit des quaternions, la combinaison des rotations $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ est donc représentée par le quaternion Q

$$(16) \qquad Q = \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 \\ \beta_2 & \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\bar{\beta}_1 \\ \beta_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_1 - \bar{\beta}_2\beta_1 & -\alpha_2\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2\bar{\alpha}_1 \\ \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\beta_1 & -\beta_2\bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie au passage que la matrice Q est bien du type quaternion (7) et que sa première colonne suffit pour le déterminer. On peut donc remplacer la multiplication de matrices par une multiplication de spineurs définie par

$$(17) \qquad (\alpha,\beta) = (\alpha_2,\beta_2) \times (\alpha_1,\beta_1) = (\alpha_2\alpha_1 - \bar{\beta}_2\beta_1,\, \beta_2\alpha_1 + \bar{\alpha}_2\beta_1),$$

et qui correspond à l'obtention de la première colonne de $Q(\alpha,\beta)$. Ainsi la multiplication de matrices est remplacée par quatre multiplications complexes et deux additions complexes. Si sur le plan numérique le gain n'est pas négligeable par rapport à la multiplication de matrices 3 par 3 réelles qui donne les mêmes informations, c'est surtout sur le plan de la simplicité d'écriture que le gain est important.

Rappelons d'abord que l'obtention du spineur donne accès à la rotation, c'est à dire qu'il permet d'obtenir, pour tout vecteur initial, le vecteur final, en utilisant (13). Ceci correspond à suivre l'évolution de trois vecteurs de l'espace ordinaire et est l'équivalent d'une suite de multiplications de matrices réelles 3x3. Si ces multiplications de matrices réelles sont faites sans utilisation de contraintes d'orthonormalité, le suivi des opérations par des spineurs demande de l'ordre de quatre fois moins d'opérations et est donc très avantageux. Bien sûr, dans le cas où un vecteur initial est donné et où il suffit de suivre uniquement l'évolution de ce seul vecteur sous l'influence des rotations, la représentation par spineur est au contraire plus lourde numériquement dans un facteur proche de deux. Mais, même dans ce cas, ce léger surcroît de charge pour effectuer le calcul numérique est à mettre en regard de l'extraordinaire simplicité d'écriture des rotations élémentaires sous forme quaternion comparée à l'écriture générale dans O_3, comme nous allons en donner maintenant des exemples. Ceci va aussi permettre de démontrer les équations (9) et (13), bien que celles-ci aient été posées a priori (si la vérification est simple, la genèse de (9) et (13) n'est évidemment pas du même niveau).

2.1. Rotation autour de z. Soit une rotation autour de z, appelée précession en RMN, et d'angle φ. Sa représentation par quaternion, d'après (9), est :

$$(18) \qquad Q(\varphi,\vec{z}) = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi/2} \end{bmatrix}$$

ou autrement dit son spineur représentatif est $(e^{-j\varphi/2},0)$. L'équation de la matrice densité (13) montre que si X,z sont les cordonnées initiales d'un vecteur dans l'espace ordinaire (X est, rappelons le, le nombre complexe représentant la projection du vecteur dans le plan x,y), le vecteur transformé a comme coordonnées :

$$(19) \qquad X^+ = e^{j\varphi}X,\; z^+ = z.$$

Ce qui est bien le résultat espéré.

2.2. Rotation autour de x. Soit une rotation autour de l'axe x, appelée nutation en RMN, et d'angle θ . Le quaternion représentatif est, d'après (9),

$$Q(\theta,\vec{x}) = \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix}, c = \cos\theta/2, s = \sin\theta/2. \tag{20}$$

Ou, dit de façon plus condensée, le spineur représentatif d'une nutation autour de l'axe x est $(c,-js)$. Et on vérifie que l'application de l'équation de la matrice densité (13) donne, après identification,

$$\begin{cases} X^+ &= -2cs\,jz + c^2X + s^2\bar{X} \\ z^+ &= (c^2-s^2)z + jcs(\bar{X}-X) \end{cases}. \tag{21}$$

Ce qui, en utilisant les relations trigonométriques, devient

$$\begin{cases} X^+ &= -\sin(\theta)\,jz + (X+\bar{X})/2 + \cos(\theta)(X-\bar{X})/2 \\ z^+ &= \cos(\theta)\,z + j\sin(\theta)\,(\bar{X}-X)/2 \end{cases}, \tag{22}$$

et qui finalement peut s'écrire, en isolant partie réelle et imaginaire de la première équation,

$$\begin{cases} x^+ &= x \\ y^+ &= \cos(\theta)\,y - \sin(\theta)\,z \\ z^+ &= \sin(\theta)\,y + \cos(\theta)\,z \end{cases}. \tag{23}$$

Ce qui correspond bien à l'écriture d'une rotation autour de l'axe $\vec{x}$ de l'espace ordinaire.

2.3. Rotation autour d'un axe quelconque situé dans le plan xy. Ayant obtenu l'expression de deux types de rotations autour d'axes orthogonaux, nous avons de fait accès à l'expression de toute rotation, car suivant Euler, on peut toujours décomposer une rotation sous forme de trois rotations successives d'axes orthogonaux .

Cependant, le lecteur n'ayant pas manipulé les rotations depuis un certain temps peut ressentir un peu d'appréhension devant les angles d'Euler. Or je pense, qu'en restant très terre à terre, les angles d'Euler peuvent être appréhendés facilement. Attaquons nous d'abord à la réalisation d'une rotation d'un angle θ autour d'un axe $\vec{u}$ contenu dans le plan $(\vec{x},\vec{y})$, l'angle entre $\vec{x}$ et $\vec{u}$ étant noté φ. Le terme 'réalisation' est à prendre au mot en dehors de tout objet mathématique : nous supposons avoir deux outils d'usinage ressemblant à des tours, mais cela peut être aussi deux broches de rôtissoires. Ces deux outils ont *un axe fixe* dans l'espace. L'un des outils a son axe le long de $\vec{x}$ et permet, une fois ses mords enfoncés dans un objet, de faire tourner cet objet d'un angle θ autour de l'axe $\vec{x}$. L'autre outil, on l'aura deviné, a son axe le long de l'axe $\vec{z}$ et permet lui aussi, une fois enfoncés ses mords dans l'objet, de faire tourner celui-ci autour de l'axe $\vec{z}$. On ne dispose que de ces deux outils,

qu'on ne peut pas déplacer, et qui évidemment ne peuvent être utilisés simultanément. On nous demande, étant donné un objet placé au centre O entre les deux paires de mords, de le faire tourner d'un angle θ autour d'un axe $\vec{Ou}$ contenu dans le plan $\vec{x}O\vec{y}$, l'angle entre $\vec{x}$ et $\vec{u}$ étant φ. L'énoncé du problème et la séquence solution sont représentés en figure (7) sous forme simplifiée (on nous fera grâce de la représentation concrète des mords ou des broches de rôtissoires). L'explication de la séquence est la suivante : à l'endroit d'où 'sort' le vecteur $\vec{u}$, *marquons* sur l'objet un point m. Puisque le seul axe autour duquel nous pouvons imposer une nutation est l'axe $\vec{x}$ du premier outil, il nous faut amener cette marque m en coïncidence avec l'axe $\vec{x}$. Or ceci est dans nos possibilités grâce au tour ou à la broche d'axe $\vec{z}$. Nous imposons donc à l'objet une rotation $\mathcal{R}(-\varphi,\vec{z})$. Une fois la marque le long de l'axe $\vec{x}$ nous pouvons imposer à l'objet, en quelque sorte autour de son axe $\vec{\mathrm{Om}}$, la nutation θ, $\mathcal{R}(\theta,\vec{x})$. Il ne reste plus qu'à ramener la marque m le long de l'axe $\vec{u}$, par la rotation inverse à la première autour de z, $\mathcal{R}(\varphi,\vec{z})$. L'ensemble de nos opérations s'écrit :

$$\mathcal{R}(\theta,\vec{u}(\varphi)) = \mathcal{R}(\varphi,\vec{z}) \circ \mathcal{R}(\theta,\vec{x}) \circ \mathcal{R}(-\varphi,\vec{z}). \tag{24}$$

Passons maintenant à la représentation sous forme de quaternion, qui est immédiate puisque nous avons déjà établi que la composition de rotation correspond à la multiplication dans des quaternions représentatifs. En effectuant cette multiplication on réalisera combien elle est simple car les deux matrices extrêmes sont diagonales. En effet

$$Q(\theta,\vec{u}(\varphi)) = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{j\varphi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi/2} \end{bmatrix} \tag{25}$$

avec toujours $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$ donne immédiatement le résultat

$$Q(\theta,\vec{u}(\varphi)) = \begin{bmatrix} c & -jse^{-j\varphi} \\ -jse^{j\varphi} & c \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Un cas particulier est celui de la rotation d'angle θ autour de $\vec{y}$ obtenue en faisant $\varphi = \pi/2$, ce qui donne

$$Q(\theta,\vec{y}) = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, c = \cos(\theta/2), s = \sin(\theta/2). \tag{27}$$

On note par ailleurs que la caractéristique d'une rotation dont l'axe est dans le plan x,y est que la partie imaginaire de α est nulle, ce qu'on vérifie dans (11) en posant $n_z = 0$.

2.4. Rotation générale. On peut faire usage direct de la définition générale (9) qui, ici, a été écrite a priori. Il peut en effet arriver que l'angle et l'axe de la rotation soient donnés, on peut alors en déduire le quaternion ou le spineur par l'expression qui a été donnée en (11). Il est cependant rare en RMN qu'on soit maître de l'axe de la rotation et c'est plutôt à une suite de nutations entourée de période de précession (un sandwich *zxz* ou *zyz*) à laquelle

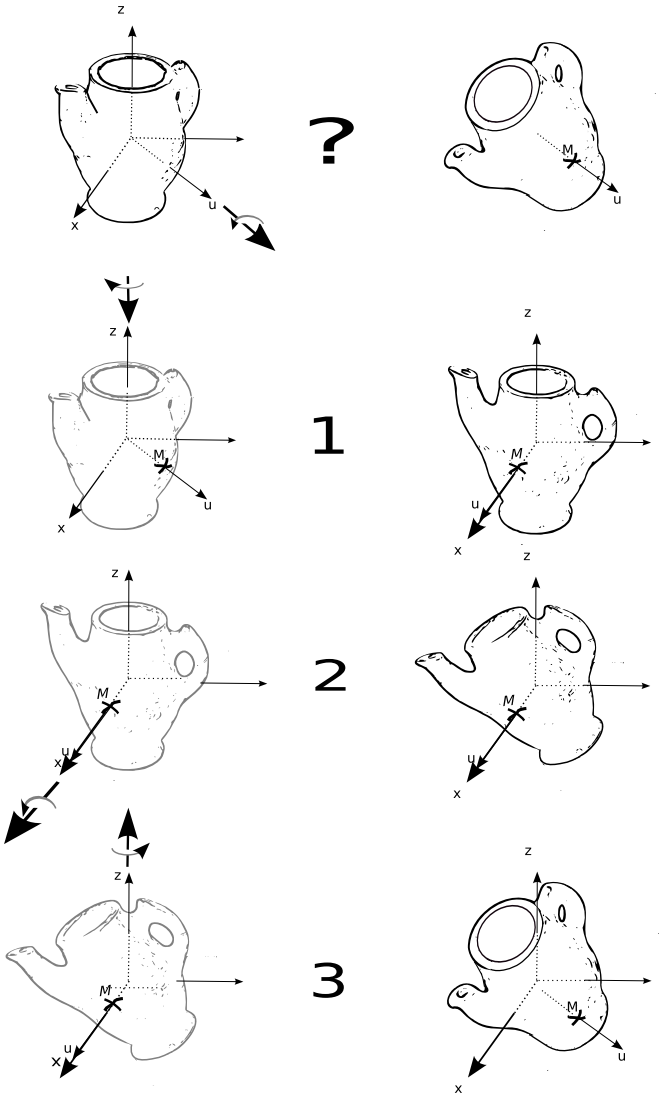

FIG. 7. On désire appliquer à un objet une rotation d'angle θ autour d'un axe $\vec{u}$ contenu dans le plan $\vec{xy}$, alors qu'on ne sait effectuer que des rotations autour des axes $\vec{x}$ et $\vec{z}$ du laboratoire. On repère, à l'aide d'une marque (M) la position de l'axe $\vec{u}$. Alors, opération 1, une rotation d'axe $\vec{z}$ et d'angle adapté permet d'amener la marque M en concordance avec l'axe $\vec{x}$. On peut alors effectuer une nutation avec l'angle θ , opération 2. Il ne suffit plus alors, opération 3, que de ramener la marque en sa position initiale dans le plan $\vec{xy}$.

on aura affaire. On peut d'ailleurs d'après Euler représenter une rotation par une suite de trois rotations d'axes perpendiculaires. Aussi la représentation sous forme d'angles d'Euler est souvent plus adaptée que l'axe et l'angle.

2.4.1. *Représentation par une séquence de trois rotations* . On peut toujours représenter une rotation par la composition de trois rotations successives, précession, nutation, précession [**39**], suite particulière de rotations d'Euler.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varphi_2, \vec{z}) \circ \mathcal{R}(\theta, \vec{x}) \circ \mathcal{R}(\varphi_1, \vec{z}), \tag{28}$$

qu'on trouve représentée, après un rapide calcul similaire à celui que nous venons de faire, par la matrice SU_2

$$Q(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \begin{bmatrix} ce^{-j(\varphi_1+\varphi_2)/2} & -jse^{-j(\varphi_2-\varphi_1)/2} \\ -jse^{j(\varphi_2-\varphi_1)/2} & ce^{j(\varphi_1+\varphi_2)/2} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Le spineur général d'une rotation composée d'une première précession φ_1, suivie d'une nutation d'axe x, suivie d'une deuxième précession est donc représenté par

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos(\theta/2) e^{-j(\varphi_1+\varphi_2)/2} \\ \beta &= -j \sin(\theta/2) e^{j(\varphi_2-\varphi_1)/2}. \end{aligned} \tag{30}$$

A partir de cette expression, on notera que la phase de α est gouvernée par la demi somme des angles de précession alors que la phase de β, mis à part le terme j, est gouvernée par la demi différence des angles de précession $\varphi_1$et φ_2.

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= -(\varphi_1 + \varphi_2)/2 \\ \varphi_\beta &= (\varphi_2 - \varphi_1 - \pi)/2 \end{aligned} \tag{31}$$

Par exemple si on veut augmenter l'argument de α d'une valeur $d\varphi_\alpha$ sans rien changer d'autre, il faut ajouter de part et d'autre de la séquence une même précession d'angle $d\varphi_\alpha$, $d\varphi_1 = -d\varphi_\alpha$, $d\varphi_2 = -d\varphi_\alpha$; à l'inverse un changement de phase $d\varphi_\beta$ de la composante β est obtenu par deux précessions de signes opposés $d\varphi_1 = -d\varphi_\beta$ $d\varphi_2 = +d\varphi_\beta$.

Aussi, ceci prouve que tout spineur α et β peut être obtenu par la combinaison de rotations (28), précession, nutation, précession. Non seulement le spineur représente de manière quasi directe l'axe et l'angle de la rotation par l'équation (11), il donne immédiatement la suite des angles de rotation φ_1, θ, φ_2 d'une séquence d'Euler le générant ! Il suffit de séparer les angles de phase (ou arguments) de α et β pour obtenir par addition et soustraction les précessions $\varphi_1$et φ_2 ; quant à leurs modules, ils donnent accès θ. Bien que la représentation en séquence d'Euler de (32) utilise des rotations autour des axes fixes, il se trouve que les angles φ_1, θ, φ_2 sont exactement, à l'ordre près, les angles d'Euler tels que classiquement introduits par des rotations autour d'axes variables liés à l'objet. Ce résultat parait étrange à première vue aussi le démontrons nous car il est parfois difficile de le trouver (il est exposé par exemple dans [**39**]).

2.4.2. *Les angles d'Euler 'classiques'*. Bien qu'en fait il y ait de nombreuses définitions possibles des angles d'Euler, c'est celle présentée en figure (8) qui est utilisée en mécanique du solide. Une précession d'angle ψ amène $\vec{x}$ en $\vec{u}$ autour duquel on effectue

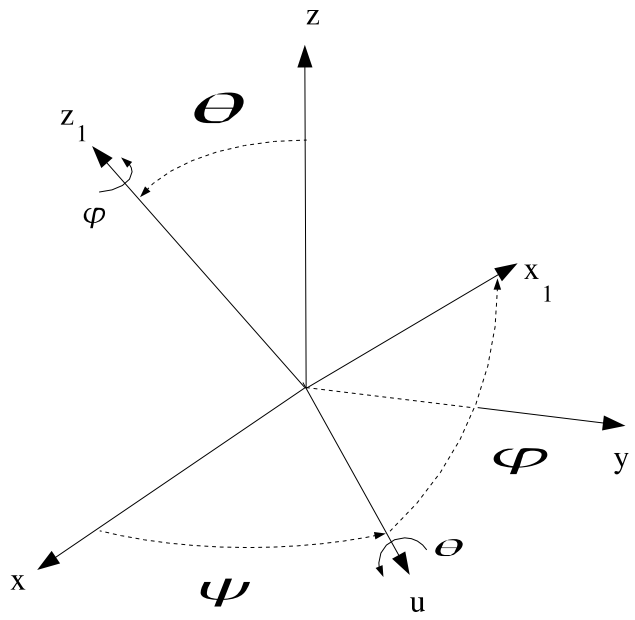

FIG. 8. Les angles d'Euler tels que définis généralement en mécanique. Une première rotation d'axe z, et d'angle ψ amène l'axe $\vec{x}$ du solide en la position $\vec{u}$. On applique alors autour de cet axe $\vec{u}$ une nutation d'angle θ, qui amène l'axe $\vec{z}$ du solide en la position $\vec{z}_1$, et c'est autour de cet axe qu'on applique la "rotation propre" d'angle φ.

une nutation θ qui transforme $\vec{z}$ en $\vec{z}_1$, autour duquel on applique un angle dit de 'rotation propre' φ.

$$\mathcal{R}(\psi,\theta,\varphi) = \mathcal{R}(\varphi,\vec{z}_1)\circ\mathcal{R}(\theta,\vec{u}(\psi))\circ\mathcal{R}(\psi,\vec{z}) \tag{32}$$

Ces rotations sont, dans cette définition classique, liées à l'objet. Nous voudrions remplacer ces rotations par une suite de rotations autour de $\vec{x}$ ou $\vec{z}$, axes du repère fixe, comme en (28). Les deux premières opérations de précession et de nutation semblent à notre portée car nous savons depuis le paragraphe précédent réaliser une nutation autour de n'importe quel axe du plan xy ; ce qui parait poser problème est la dernière 'rotation propre' autour d'un axe non particulier $\vec{z}_1$, $\mathcal{R}(\varphi,\vec{z}_1)$. Suivant un peu la même procédure que précédemment, marquons d'une marque m l'objet à l'endroit d'où sort le vecteur $\vec{z}_1$. Une nutation $\mathcal{R}(-\theta,\vec{u}(\psi))$, que nous savons maintenant réaliser, même si de façon laborieuse, nous permet d'amener $\vec{z}_1$ le long de $\vec{z}$. Nous pouvons alors appliquer à l'objet une précession φ (donc autour de l'axe $\vec{Om}$ de l'objet). Il ne reste plus alors qu'à reconduire la marque m à sa position originale par $\mathcal{R}(\theta,\vec{u}(\psi))$. Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{R}(\varphi,\vec{z}_1) = \mathcal{R}(\theta,\vec{u}(\psi))\circ\mathcal{R}(\varphi,\vec{z})\circ\mathcal{R}(-\theta,\vec{u}(\psi)) \tag{33}$$

En insérant ceci dans (32) et en simplifiant on obtient

$$\mathcal{R}(\psi,\theta,\varphi) = \mathcal{R}(\theta,\vec{u}(\psi)) \circ \mathcal{R}(\varphi,\vec{z}) \circ \mathcal{R}(\psi,\vec{z}), \tag{34}$$

qui en développant maintenant $\mathcal{R}(\theta,\vec{u}(\psi))$ se simplifie en

$$\mathcal{R}(\psi,\theta,\varphi) = \mathcal{R}(\psi,\vec{z}) \circ \mathcal{R}(\theta,\vec{x}(\psi)) \circ \mathcal{R}(\varphi,\vec{z}) \tag{35}$$

En quelque sorte, exprimés dans les axes du repère original 'fixe', les angles d'Euler sont appliqués en ordre inverse de celui utilisé dans la définition qui est faite dans des repères liés à l'objet :

$$\varphi_1 = \varphi,\ \theta = \theta,\ \varphi_2 = \psi \tag{36}$$

Donc, pour référence uniquement, et par identification dans (30), le spineur associé à la rotation générale donnée par les angles d'Euler classiques (ou tels que définis en figure (8)) est

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos(\theta/2)e^{-j(\varphi+\psi)/2} \\ \beta &= -j\sin(\theta/2)e^{-j(\varphi-\psi)/2} \end{aligned} \tag{37}$$

2.5. Du quaternion à l'espace ordinaire. Ainsi, en présence d'une longue série de rotations élémentaires, on définira les quaternions ou spineurs des rotations élémentaires à partir des relations(18) (20)(27) (26). On effectuera ensuite la combinaison des spineurs par une suite de multiplications telles que (17), peut-être sans trop se soucier de la signification de ces résultats intermédiaires. Cependant, une fois la suite de multiplications de spineurs effectuée, se pose la question d'expliciter le résultat obtenu. Il y a trois voies possibles. La première solution consiste à inverser les relations que nous venons d'expliciter entre les angles d'Euler et les phases et amplitudes des composantes du spineur résultant α, β. La deuxième consiste à retrouver l'axe de la rotation et son angle à partir de α,β, opération a priori évidente mais qui, de fait, demande un peu de discernement. Enfin, la dernière solution ne s'occupe pas de représenter la rotation en tant que telle mais uniquement la transformation qu'elle fait subir à l'aimantation, en utilisant l'équation de la matrice densité (13).

2.5.1. *Suite de précessions et nutation.* Souvent la caractérisation la plus efficace d'une suite de rotations dont on a obtenu le spineur résultant α, β consistera à écrire la suite des opérations, précession d'angle $\varphi_1 = -(\varphi_\alpha + \varphi_\beta)$, nutation d'axe y et d'angle $\theta = 2\arcsin(|\beta|)$, suivie d'une précession d'angle $\varphi_2 = -\varphi_\alpha + \varphi_\beta$, comme déjà exposé au paragraphe (2.4.1) et suivant l'équation (30). Comme il vient d'être démontré, cette suite de rotations dans les axes fixes du laboratoire peut être aussi transformée en la suite des rotations d'Euler dans des axes liés à l'objet (36).

2.5.2. *L'axe et l'angle de rotation, à partir de* α, β. Ce paragraphe n'est pas utile pour expliquer l'algorithme SLR, mais est utile dans la modélisation simplifiée des séquences rapides qui seront présentées dans un autre chapitre.

Étant donné le spineur (α,β) on peut obtenir l'axe et l'angle de la rotation qu'il représente, par identification dans l'expression (11). Mais cette opération présente quelques subtilités. Et pour ne pas se perdre il faut faire la remarque préalable suivante : un quaternion Q et son opposé $-Q$ représente la même rotation dans l'espace ordinaire. Par identification de (11) on peut dire que l'axe de la rotation est

$$\vec{n} = -k \begin{bmatrix} \beta_i \\ -\beta_r \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \tag{38}$$

k étant le facteur de normalisation $1/\sqrt{|\beta|^2+\alpha_i^2}$. La norme du vecteur $\vec{n}$ donne aussi la rotation efficace Ω par

$$\sin(\Omega/2) = \sqrt{\beta_i^2+\beta_r^2+\alpha_i^2}. \tag{39}$$

Mais on a aussi

$$\cos(\Omega/2) = \alpha_r. \tag{40}$$

Dans l'équation (39) on a supposé sans ambiguïté que $\sin\Theta/2$ était positif : changer son signe, oblige à changer le sens du vecteur $\vec{n}$ dans (39), de façon à conserver le produit $\sin(\theta/2)\vec{n}$ dans (9), et cela correspond finalement à la même rotation. On suppose donc, sans que cela soit restrictif, que $\Omega/2$ est entre 0 et π. L'équation (40) (ou simplement le signe de α_r) permet de lever l'ambiguïté entre $\Omega/2 = \Omega_0/2$ et $\Omega/2 = \pi - \Omega_0/2$. Ces deux solutions distinctes de (39) correspondent bien à deux rotations distinctes, de même axe, mais d'angles opposés Ω_0, $-\Omega_0$ (c'est à dire deux rotations inverses l'une de l'autre ! Les quaternions correspondant (α,β) et $(-\bar{\alpha},\beta)$ -ou- $(\bar{\alpha},-\beta)$ étant dits conjugués, pourquoi pas inverses ?). Il y a une discontinuité lorsque α_r passe à zéro, et donc l'angle de rotation à π. Mais effectivement en ce point on peut décider ou non que π et $-\pi$ sont le même angle. En tout cas on peut obtenir dans cette représentation des fonctions continues pour l'axe $\vec{n}$ ainsi que l'angle de rotation Ω, à la condition de passer continûment de $\pi-\varepsilon$ à $\pi+\varepsilon$, et d'admettre qu'un angle de rotation qui était au départ négatif $-\Omega_0$ (avec $0<\Omega_0<\pi$), se retrouve exprimé par $2\pi-\Omega_0$ ou même, après plusieurs passages à zéro de α_r par $2k\pi-\Omega_0$. L'autre solution consiste à considérer que $\cos(\Omega/2)$ est positif (on peut toujours changer le signe global du spineur), en addition de $\sin(\Omega/2)$ positif, donc Ω est toujours positif et inférieur à π et c'est alors le vecteur $\vec{n}$ axe de la rotation, tel que donné par (39) qui est discontinu au passage de $\Omega=\pi$.

2.5.3. *Les paramètres de Cayley-Klein.* C'est certainement la méthode de 'décriptage' de α,β la plus utilisée. Elle permet d'expliciter à partir du spineur résultant (α,β), l'aimantation, ou les aimantations si plusieurs conditions initiales sont à prendre en compte, par l'équation de la matrice densité (13), faisant ainsi la liaison entre le groupe SU_2 et O_3.

Supposons connus le spineur (α,β) de la rotation et les coordonnées $X = x + jy$, z du vecteur de départ. Il est demandé de trouver à l'aide (13), les cordonnées du vecteur transformé X^+, z^+. Le calcul est assez simple, car il suffit de suivre une colonne. On obtient donc assez facilement

$$\begin{aligned} X^+ &= -\beta^2 \bar{X} + \bar{\alpha}^2 X + 2\bar{\alpha}\beta z \\ z^+ &= \beta\alpha\bar{X} + \bar{\alpha}\bar{\beta}X + (\bar{\alpha}\alpha - \bar{\beta}\beta)z \end{aligned} \tag{41}$$

équation dont il sera fait un usage répété par la suite. C'est l'équivalent direct des équations dans O_3, qu'on peut d'ailleurs retrouver en séparant parties réelle et imaginaire de X et X^+. Les paramètres

$$-\beta^2,\ \bar{\alpha}^2,\ 2\bar{\alpha}\beta,\ \alpha\beta,\ \bar{\alpha}\alpha - \bar{\beta}\beta, \tag{42}$$

sont parfois appelés paramètres de Cayley-Klein. Nous allons en donner tout de suite quelques exemples d'application pratique pour la simulation mais nous reviendrons plus en détail sur le sujet après l'obtention de l'algorithme d'inversion Shinnar-LeRoux.

2.5.4. *Application des spineurs à la simulation.* Pour obtenir les profils des figures (2) et (5) il a été supposé que les impulsions RF étaient de durée D suffisamment courte, quelques millisecondes, pour que l'effet des relaxations longitudinales et transversales soit négligeable. Ces quelques millisecondes ont été divisées en quelques centaines d'intervalles d'une durée T de deux à dix microsecondes, et la fonction temporelle $b_1(t)$ échantillonnée et bloquée. Pour chacun de ces intervalles, et pour chaque fréquence de résonance ω le spineur de la rotation (5) autour du champ efficace (4) est calculé en application de la formule (9). Il ne reste plus ensuite qu'à effectuer le produit de ces spineurs (17) équivalent des produits de matrices SU_2. Le programme correspondant en Octave (Matlab) est donné sous forme de l'algorithme (1). On fait ensuite usage des équations (41) pour obtenir les profils. Ainsi dans le cas d'une impulsion de bascule, l'aimantation initiale est $(X,z) = (0,1)$ et on cherche l'aimantation transverse X^+ après l'impulsion, soit d'après (41), le produit $2\bar{\alpha}\beta$. Le profil d'une impulsion de refocalisation concerne la transformation d'une aimantation originellement dans le plan xy en sa partie, dans le même plan après l'impulsion, mais dont la phase est changée de signe : d'après (41) ce "transfert utile" est donnée par $-\beta^2$ qui transforme une aimantation tranversale X en sa complexe conjuguée $X^+ = \bar{X}$. Pour que le signal reçu ne corresponde effectivement qu'à cette partie 'refocalisée', il faut la présence de gradients d'écrasage de telle façon que le transfert de X vers $X^+ = \bar{\alpha}^2 X$, c'est à dire la partie n'ayant pas subi de conjugaison, ait un gain ($\bar{\alpha}^2$) présentant plusieurs cycles complets dans un élément typique de volume reconstruit.

Algorithm 1 Function Octave (Matlab) permettant la simulation de profils correspondant à une modulation RF en escalier, tels qu'obtenus en Figure (2) . On a utilisé la fonction sinus cardinal $\text{sinc}(\phi) = \sin(\phi)/(\phi)$. Il ne reste plus selon le type de profil cherché qu'à calculer vectoriellement les paramètres de Cayley-Klein (41), par exemple $2\bar{\alpha}\beta$ pour l'aimantation transverse après une impulsion de bascule.

```
function [gamma, sigma] = SpineursOmegasOmega1(omega, omega1)
% Chaque 'marche' d'escalier dure un temps T = 1 unité
% (par exemple 10 microseconde) et ainsi omega ou omega1 sont
% en fait des angles de rotation et s'expriment en radians.
% omega est un vecteur, omega11 un scalaire (complex)
%
        PulsationEfficace = sqrt(omega .* omega + abs(omega1)*abs(omega1));

        z = -omega;
        xy = omega1;

        c = cos(0.5 * PulsationEfficace);
        sSurNorm = sinc(0.5 * PulsationEfficace) ;

        gamma = c -j * sSurNorm .* z;
        sigma = -j * sSurNorm .* xy;
end
function [alpha, beta] = simulSequenceEscalier(omega1, omega)
        ntime = length(omega1);
        nfreq = length(omega);

        alpha = ones(size(omega));
        beta = zeros(size(omega));

        for i=1 :ntime
                omega11= omega1(i);
                [gamma,sigma] = SpineursOmegasOmega1(omega, omega11);
                alpha1 = gamma .* alpha - conj(sigma) .* beta;
                beta   = sigma .* alpha + conj(gamma) .* beta;
                alpha(1 :nfreq) = alpha1(1 :nfreq);
        end;
end
```

De même le profil utile d'une inversion ou d'une impulsion de saturation correspond au transfert de $(X,z) = (0,1)$ vers z^+ et correspondant donc au coefficient $(\bar{\alpha}\alpha - \bar{\beta}\beta)$.

3. L'approximation d'excitations radiofréquence par un train d'impulsions dures.

3.1. Précédents. L'approximation par train d'impulsions dures du signal ω_1 correspond à remplacer chacune des impulsions de largeur T du signal en escalier $\tilde{\omega}_1$ sur la figure (6) par une impulsion de Dirac de même centre et de même intégrale. On suit en cela

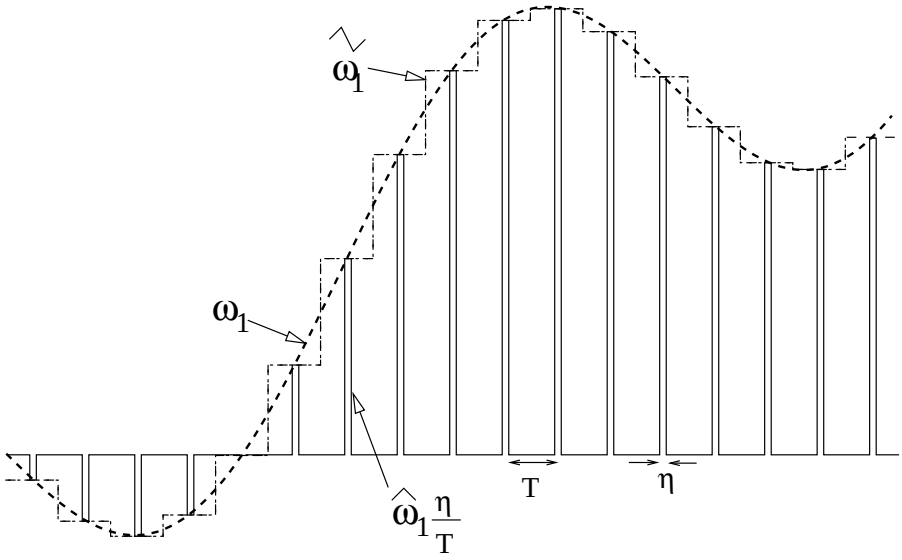

FIG. 9. Un approximation beaucup plus drastique que le blocage à l'ordre zéro de la figure (6) consiste à remplacer chacune des impulsions de durée T par une impulsion très courte de durée η mais de même intégrale temporelle. On obtient à la limite un train d'impulsions de Dirac modulé par le signal continu. On note $\hat{\omega}_1(t)$ ce signal. Son influence sur l'aimantation est des plus simples car elle est composée d'une suite de nutations pures, pendant les impulsions dures, intercalées de période de durée Toù seule intervient la précession due à la pulsation de résonance ω.

l'approximation classique réalisée en traitement du signal échantillonné et en commande discrète des processus [**51, 52**]. Cela simplifie énormément les équations car la rotation continûment variable est remplacée par une succession *à intervalles réguliers* de nutation pures infiniment courtes (où l'influence de la pulsation de résonance est négligeable) et de précessions pures (où au contraire l'influence du champ b_1 est nulle). On se ramène alors à des types d'analyses déjà utilisées en spectroscopie RMN où la réponse en fréquence est périodique. Le précurseur de la technique est l'article de Tomlinson et Hill [**53**] de 1973 , d'où j'extrais cette phrase

> "This is accomplished by digitally computing a discrete Fourier synthesis of the frequency spectrum and using the function generated to modulate a sequence of radio pulses."

Par ailleurs la figure 3a de cette référence correspond exactement à la modulation d'amplitude d'un train d'impulsions dures, tel qu'on le présente ici sur la figure (9).

Comme montré sur cette figure nous remplaçons le signal RF complexe (2) $\tilde{\omega}_1$, bloqué à l'ordre zéro, dont la valeur est $\omega_1(iT)$ pendant tout l'intervalle de temps $iT - T/2$, à $iT + T/2$, par un champ RF constitué d'impulsions de durée extrêmement courte. Pour fixer les idées, soit η cette durée, finie dans un premier temps. Nous voulons obtenir entre les temps $t = iT - T/2$ et $t = iT + T/2$ la même nutation pour les protons à la résonance et donc le champ RF doit donner la même intégrale temporelle dans les deux cas

$$\hat{\omega}_1(i) = \frac{T}{\eta}\omega_1(iT), \quad iT - \eta/2 < t < iT + \eta/2. \tag{43}$$

En dehors de ces impulsions de durée η le champ RF est nul. Donc dans un intervalle donné de durée T et en dehors de l'impulsion dure, l'aimantation ne subit que l'influence de la précession due à la pulsation de résonance ω. Inversement, pendant l'impulsion dure, et en supposant que l'on fasse tendre η vers zéro, et pour des pulsations de résonance ω finies, le champ efficace est dominé par la RF et l'aimantation subit une nutation pure le long de l'axe $-\omega_{1x}$,-ω_{1y} et d'angle de nutation

$$\theta(i) = \eta|\hat{\omega}_1(i)| = T|\omega_1(iT)|. \tag{44}$$

Il existe bien d'autres travaux antérieurs au brevet de 1986 [**34**] concernant les trains d'impulsions dures. Parmi ceux-ci on doit citer le travail introductif à DANTE par Bodenhausen, Freeman, Morris [**54**], l'article introduisant le nom DANTE ("Delays Alternating with Nutations for Taylored Excitation") de Morris, Freeman[**55**] et les papiers de Hore de 1983 [**56, 57**]. On remarquera cependant que ces articles datent de l'époque où la génération d'une impulsion continue modulée était difficile et que justement un de leur but était de remplacer cette impulsion continue sélective par un train d'impulsions dures. Ceci peut être considéré comme un peu différent du fait d'utiliser comme *modèle* d'une impulsion continue un train d'impulsions dures. En effet on peut avoir des trains d'impulsions créant une certaine réponse et que cette réponse ne puisse pas être réalisée par une excitation continue, même lorsque l'on restreint la comparaison aux basses fréquences de résonance. Ce sera d'ailleurs le troisième volet de l'algorithme polynomial qui permettra de déterminer parmi un grand nombre de solutions celle qui est à énergie minimale. De ce fait, elle sera équivalente à basse fréquence à une onde continue. En tout état de cause, il est évident que cette technique d'approximation est bien antérieure à l'algorithme SLR. En effet, on peut relier ce type d'approximation à toute modélisation par éléments discrets d'un milieu ou d'un processus continu comme par exemple le modèle discret de ligne électrique ou acoustique. D'ailleurs, un exemple pas très éloigné de ce qui nous préoccupe ici est l'inversion d'impédance acoustique en recherche géologique par un modèle en tranches discrètes [**58**] et des techniques d'IST ('Inverse Scattering Transform') dont nous aurons à parler. Mais surtout et avant tout, représenter un signal continu par sa version échantillonnée est une technique utilisée dans toute boucle de contrôle numérique d'un processus. Etant automaticien de formation, j'avoue ne pas m'être interrogé avant de l'utiliser. Cependant de légitimes questions peuvent être posées et c'est le but de ce paragraphe de les rappeler et peut-être d'y répondre.

3.2. Justification du modèle. Se référant à la figure (9) et si l'on admet que l'approximation par blocage à l'ordre zéro $\tilde{\omega}_1$, de valeur constante $\omega_1(iT)$ entre $t = iT - T/2$ et $t = iT + T/2$, remplace (est équivalente à) la fonction $\omega_1(t)$, alors faisant tendre la durée des impulsions courtes η vers zéro on obtient des impulsions de Dirac $T\omega_1(iT)\delta(t - iT)$. On est amené ainsi au processus d'échantillonage idéal classique en traitement du signal

et on obtient un signal formé d'un train d'impulsions de Dirac infiniment courtes et d'amplitude infiniment grande mais d'intégrales données, $T\omega_1(iT)$, dans chacun des intervalles. C'est ce signal temporel que nous notons désormais $\hat{\omega}_1(t)$

$$\hat{\omega}_1(t) = T[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t-iT)]\omega_1(t) = T\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \omega_1(iT)\delta(t-iT). \tag{45}$$

Dans la suite de ce travail on utilisera la notation suivante pour la transformée de Fourier d'une quantité ou valeur v fonction de t, t étant le temps 'physique' :

$$v(\varpi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\varpi t} v(t)dt. \tag{46}$$

On remarquera l'utilisation de la notation ϖ comme variable conjuguée du temps 'physique' t ; nous réservons en effet la notation ω au 'paramètre' pulsation de résonance.

Dans (45) le 'train de Dirac' "$\delta(t-iT)$, $i=-\infty,\infty$", a comme transformée de Fourier $\sum_k \delta(\varpi - k\frac{2\pi}{T})$, $k=-\infty$,∞, est multiplié par la fonction temporelle complexe $\omega_1(t)$. En conséquence, la transformée de Fourier $\hat{\omega}_1(\varpi)$ de l'approximation $\hat{\omega}_1(t)$ est la réplication décalée et répétée de la transformée de Fourier du signal original [**51**], c'est le célèbre théorème de Cauchy ou Shannon.

$$\hat{\omega}_1(\varpi) = (\sum_k \delta(\varpi - k\frac{2\pi}{T})) \odot \omega_1(\varpi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_1(\varpi - k\frac{2\pi}{T}) \tag{47}$$

où $\odot$ est l'opérateur convolution, et $\omega_1(\varpi)$ est la transformée de Fourier du signal original.

Une façon plus directe d'obtenir ce résultat, et qui nous permet d'introduire la transformée en 'z', consiste à reporter la définition du signal échantillonné (45) dans la définition de la transformée de Fourier (46). On obtient alors directement la transformée de Fourier de $\hat{\omega}_1(t)$ sous la forme

$$\hat{\omega}_1(\varpi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \omega_1(iT)e^{-j\varpi iT} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \omega_1(iT)z^i, \tag{48}$$

c'est à dire qu'elle n'est fonction que de la variable

$$z = e^{-j\varpi T}. \tag{49}$$

On parle alors, pour la deuxième forme de l'égalité (48), de la transformée en 'z' de la séquence $\omega_1(iT)$.

Si le support de $\omega_1(\varpi)$ est fini, disons de largeur $\Delta\varpi = 2\varpi_M$, et si la condition de Cauchy (ou Shannon) est réalisée $2\pi/T > 2\varpi_m$, aucun des repliements $\omega_1(\varpi - 2\pi/T)$, $\omega_1(\varpi + 2\pi/T)$,... ne viendra entacher le spectre original $\omega_1(\varpi)$ dans la bande de base $|\varpi| < \varpi_m$. Dans la pratique le signal $\omega_1(t)$ n'est pas à bande finie, et, étant d'ailleurs ici à temps limité, cela serait une condition impossible à réaliser. Mais il suffit de faire tendre

la période d'échantillonage T vers des valeurs très petites pour avoir convergence, parfois lente, mais sûre, des transformées de Fourier des deux types d'excitations à basses fréquences . Et on peut penser *a priori* que cela induit la convergence des réponses en aimantation correspondant aux deux types d'excitations. Ainsi on trouve la phrase suivante (p 447) de l'article DANTE [**55**]

> "For a magnetization close to one of these sideband conditions, the pulse sequence acts just like a weak selective pulse".

Or c'est justement cette supposition qui pose question ! En effet le système d'équations de Bloch qui lie la modulation RF aux diverses aimantations n'est pas linéaire, si l'angle de nutation total est trop élevé. Il n'est pas garanti que l'aimantation, même confinée dans une petite bande de pulsations de résonance $|\omega| < \varpi_M$ réagisse de façon similaire à l'excitation originale $\omega_1(t)$ et à sa version échantillonnée $\hat{\omega}_1(t)$. On pourrait imaginer que les hautes fréquences $(\omega_1(\varpi + 2\pi/T)\ldots)$ introduites par le phénomène d'échantillonage se combinent et s'amplifient avec les composantes de la bande de base $\omega_1(\varpi)$. En effet et toujours a priori, rien ne peut être exclu avec un système non linéaire : on sait par exemple qu'un système contenant une hystérésis peut, sur une entrée sinusoïdale, créer des 'sous-harmoniques' . Dans ce cas, remplacer un signal continu par sa version échantillonnée est une garantie de ne pas avoir concordance des sorties, même lorsque celles-ci ne sont analysées que dans les basses fréquences. Cependant la caractérisation de l'effet combiné de l'échantillonnage et de la non linéarité n'est pas aussi difficile dans notre cas car l'évolution du système sur une entrée en train de Dirac est très simple pendant les périodes d'évolution libre qui séparent chacune de ces impulsions de Dirac. D'abord on peut montrer que la réponse, caractérisée possiblement par l'aimantation, est périodique vis à vis du paramètre pulsation de résonance ω. Précisément si $\vec{M}(t,\omega)$ désigne l'aimantation qui résonne à la pulsation ω et si on échantillonne l'évolution qu'aux temps des impulsions dures $t = iT$, il est évident qu'à une pulsation de résonance ω donnée, sa transformée de Fourier le long de l'axe du temps 'physique', $\vec{M}(\varpi, iT)$ soit périodique en ϖ. Il n'est cependant pas directement immédiat que cette périodicité soit vraie également sur la direction ω, l'axe de la pulsation de résonance

$$\vec{M}(t = iT, \omega + K\frac{2\pi}{T}) = \vec{M}(t = iT, \omega), \quad K = -\infty, \infty. \tag{50}$$

On peut démontrer ceci sans pratiquement aucun traitement mathématique. Remarquons d'abord qu'entre deux impulsions radio fréquence d'une excitation en train de Dirac, les éléments d'aimantation qui résonnent respectivement à ω et $\omega + 2K\pi/T$, s'ils peuvent effectivement être différenciés par la lecture du signal qu'ils envoient, ils subissent la même précession $(2K\pi)$ dans l'intervalle total T et sont indiscernables vis à vis de l'excitation ; s'ils sont dans une position identique à la fin d'une impulsion dure, il seront à nouveau en coïncidence au début de l'impulsion suivante ; donc partant de la même condition initiale, ils seront toujours indiscernables l'un de l'autre au temps des impulsions. C'est exactement ce qu'exprime l'équation (50). Cette remarque simple permet déjà de comprendre qu'il est bien évidemment inutile d'espérer une convergence des réponses à hautes fréquences,

la réponse au signal en train d'impulsions présentant des réplications identiques à intervalles régulier $\Delta\omega = 2K\pi/T$. Elle simplifie cependant considérablement l'analyse et peut nous conforter dans l'idée que, si la plage de fréquence de résonance est finie $\Delta\varpi = 2\varpi_M$ et qu'on fait tendre T vers zéro, les réponses respectives au train de Dirac $\hat{\omega}_1(t)$ et au signal continu $\omega_1(t)$ convergent l'une vers l'autre. Là encore rien ne permet de le dire, car pour l'instant rien ne permet de caractériser l'étendue des réplications autour des centres $\omega = 2K\pi/T$. Cependant je présente un embryon de démonstration de la convergence des réponses en aimantation sous l'influence du signal en escalier $\tilde{\omega}_1(t)$ (et non pas $\omega_1(t)$!) et sous l'influence de son approximation échantillonnée $\hat{\omega}_1(t)$. La démonstration repose sur le fait que l'amplitude de l'excitation est bornée et que dans les deux cas nous savons écrire parfaitement la rotation pour chaque intervalle. A partir de ces deux expressions, il est assez facile de montrer que les deux réponses correspondant à un seul intervalle de temps T donné, convergent l'une vers l'autre, résultat assez intuitif ! Cependant pour une impulsion sélective de durée totale finie D, diminuer la période d'échantillonnage T, augmente aussi le nombre des intervalles $d = D/T$ à considérer ! Il faut donc que la rapidité de convergence sur chaque intervalle l'emporte sur la croissance du nombre d'intervalles. Cette démonstration est donnée en Annexe car encore trop récente mais aussi, bien qu'étant une application assez directe de la représentation par spineurs, elle reste assez lourde et en tout cas est plus difficile à saisir que l'algorithme SLR lui même. Je suggère donc de la garder pour une deuxième lecture. Remarquons enfin que ceci ne démontre pas la convergence des réponses au signal continu $\omega_1(t)$ et des réponses à son approximation en train de Dirac $\hat{\omega}_1(t)$. On peut cependant admettre que les signaux d'excitation eux-mêmes, $\omega_1(t)$ et son approximation en escalier $\tilde{\omega}_1(t)$, convergeant l'un vers l'autre, il en est de même de leur réponse et donc des réponses relatives à $\omega_1(t)$ et $\hat{\omega}_1(t)$.

3.3. Les deux dimensions t et ω.

3.3.1. *A ne pas confondre comme étant deux variables conjuguées.* Le paragraphe précédent nous a amené à considérer la réponse de l'aimantation résonant avec la pulsation ω en fonction du temps t et qu'on doit donc noter sous la forme $v(t,\omega)$, v étant éventuellement un vecteur à plusieurs dimensions si c'est le vecteur d'état local (à trois dimensions réelles pour une aimantation ou deux dimensions complexes pour un spineur), mais v pouvant être aussi scalaire et de plus ne pas dépendre de ω comme c'est le cas de l'excitation RF $\omega_1(t)$. On peut analyser les réponses en passant à la transformée de Fourier le long de t comme nous l'avons fait ci-dessus pour $\omega_1(t)$ et comme beaucoup de techniques de conception d'impulsions RF l'utilisent,

$$\begin{array}{ccc} v(\varpi,\omega) & = & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\varpi t} v(t,\omega)dt \\ \varpi & \leftrightarrow & t \end{array} \tag{51}$$

où on associe au temps physique t la pulsation ϖ comme variable conjuguée. Mais on peut aussi à un moment donné t décider d'analyser la répartition des réponses le long de

l'axe ω (paramètre de résonance) par une transformée de Fourier (inverse) le long de cet axe avec une variable conjuguée ayant la dimension d'un temps et que nous noterons τ

$$\begin{array}{ccc} v(t,\tau) & = & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} v(t,\omega) d\omega \\ \tau & \leftrightarrow & \omega \end{array} . \tag{52}$$

C'est, en dernière analyse, *ce sur quoi l'algorithme SLR repose !* Prendre les transformées de Fourier (inverse) des répartitions des composantes spinorielles $\alpha(t,\omega)$, $\beta(t,\omega)$, à un temps physique t, pour obtenir deux fonctions à deux dimensions $\alpha(t,\tau)$,$\beta(t,\tau)$ serait en effet la première étape d'un algorithme ne travaillant qu'avec des variables continues ; comme *SLR* prend aussi le parti de n'utiliser que des temps discrets, grâce à l'approximation par impulsions dures, cette étape peut paraître masquée, mais il est important de la souligner, et de marquer le fait qu'il y a bien deux directions de fréquence.

Penser à prendre la transformée de Fourier inverse des répartitions le long de ω, est justifié par le fait que des périodes de précession libres de durée τ créent naturellement des fonction de l'espace ω de la forme $\exp(j\omega\tau)$. L'écriture des quantités sous la forme de $v(t,\tau)$ est d'ailleurs l'équivalent de la représentation des signaux dans l'"espace k" , k_1, k_2, k_3, (ou k_x, k_y, k_z) cher à l'imagerie *RMN*. Dans notre cas cet espace-k est mono dimensionnel et correspond à la transformée de Fourier spatiale le long de l'axe de sélection (donc ici plutôt $k_3$ou k_z), mais comme nous n'avons pas fait intervenir de gradient de sélection et donc de liaison entre pulsation de résonance et distance, la pulsation spatiale k_3 est plus simplement remplacée par le temps τ.

3.3.2. *Le cas discret, les transformées en z et Z .* Lorsque les excitations sont discrètes à la période T (ou lorsqu'on 'regarde' le système à la période T) les transformées de Fourier deviennent périodiques en ϖ. En effet, la transformée de Fourier en $t \leftrightarrow \varpi$ se résume alors à la transformée en z (pour rendre plus évident que nous nous intéressons seulement à la première dimension nous rendons muet la deuxième dimension qui est soit τ sa variable conjugé ω)

$$v(\varpi,.) = v(z,.) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} v(iT,.) z^{-i}, \qquad z = e^{j\varpi T}. \tag{53}$$

Cette transformée en z a un inverse

$$v(t = iT,.) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\oint e^{j\varpi iT} v(\varpi,.)\mathrm{d}(\varpi T) = \frac{1}{2\pi}\oint v(z,.)\frac{dz}{z}. \tag{54}$$

C'est un résultat classique, mais qui peut être retrouvé facilement en notant que les fonctions $\exp(jk\varpi T)$ sur le cercle unité $|z| = 1$ sont orthogonales, précisément

$$\frac{1}{2\pi}\oint e^{j\varpi iT} v(\varpi,.)\mathrm{d}(\varpi T) = \frac{1}{2\pi}\oint e^{j\varpi iT} \sum_{i=-\infty}^{\infty} v(lT,.) e^{-j\varpi lT} d(\varpi T) = v(iT)$$

Dans les faits nous n'aurons pas à prendre la transformée de Fourier des signaux le long de l'axe temporel 'physique' t. Mais nous utiliserons la transformée de Fourier directe

et inverse sur l'axe perpendiculaire $\omega \leftrightarrow \tau$. Or nous avons montré ci-dessus, et nous le retrouverons directement, qu'à une entrée discrète régulière de période T, correspond une répartition des aimantations périodiques en fréquence de résonance ω. Ceci veut dire qu'on peut écrire la ou les répartitions des aimantations au temps physique iT sous la forme

$$v(iT,\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(iT,k)e^{jk\omega T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(iT,k)Z^{-k},\ Z = e^{j\omega T}. \tag{55}$$

C'est à dire que nous allons manipuler des polynômes, au sens large, d'une variable Z que nous notons en capitale pour la distinguer de la première variable z. Cependant, et par analogie, on peut admettre que ces "polynômes" sont obtenus par une deuxième 'transformée en 'Z" . Et donc si on prend la transformée de Fourier inverse des répartitions, en associant à ω la variable conjuguée τ, on aurait un signal temporel constitué d'impulsions de Dirac.

$$v(iT,\tau) = \frac{1}{2\pi}\oint e^{jk\omega T}v(iT,\omega T)\mathrm{d}(\omega T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(iT,k)\delta(\tau - kT). \tag{56}$$

Ainsi à $t = iT$ donné chacun des coefficients de polynômes $v(.,k)$ représentant la fonction de Z dans (55) peut être considéré comme un échantillon d'un signal se déroulant le long du temps τ. On peut évidemment se contenter d'une vision de fonctions de la variable '$Z = \exp(j\omega T)$', mais je pense qu'il est important de faire la liaison avec la théorie du signal discret car nous utiliserons un certain nombre d'outils provenant de cette discipline et il serait difficile de parler de factorisation de spectre ou de fonction d'auto-corrélation, sans avoir fait la liaison avec un signal. Par ailleurs, on aura bien sûr tendance pour alléger l'écriture à oublier le temps T et à écrire des coefficients tels que $v(i,k)$ qui deviennent assez rapidement anonymes. On s'imposera de toujours utiliser l'indice i en première position comme indice du temps $t = iT$ physique et l'indice k (comme espace k) comme indice du temps $\tau = kT$, variable conjuguée de la fréquence de résonance. Par ailleurs, dans la mesure du possible les axes des figures porteront les étiquettes t et τ même dans un contexte où les valeurs discrètes, en tant que coefficients de polynômes, sont suffisantes. On pourra trouver par ailleurs tous les outils utilisés en se reportant à la référence [**52**]. Certains de ces outils seront rappelés ici pour les mettre dans le contexte, mais, ne faisant pas partie de mon travail, ils seront traités dans les annexes générales de la thèse.

4. Annexes

4.1. Convergence des réponses de l'approximation par train de Dirac et l'approximation en escalier d'une excitation continue.

4.1.1. *Complément sur les matrices Quaternion et Spineurs (de Pauli), norme de matrice.* On note par (α,β) un spineur, et par $Q(\alpha,\beta)$ la matrice "quaternion" associée selon (7). Il est généralement préférable de conserver la notation matricielle car elle permet plus facilement de penser à effectuer des opérations qui ne viendraient pas forcément à l'esprit

lorsqu'on utilise la notation spinorielle. Cependant, et puisque cette notation est plus compacte, on peut être tenté de l'utiliser. Il faut alors ajouter les définitions suivantes, traduction des résultats matriciels.

Le spineur "unité" (correspondant à la matrice unité) est $(1,0)$. Le produit de deux spineurs, défini en (17) et qui traduit la multiplication des deux matrices correspondantes, est non commutatif. De façon similaire le spineur "inverse" du spineur (α,β) noté $(\alpha,\beta)^{-1}$ est

$$(\alpha,\beta)^{-1} = (\bar{\alpha},-\beta)/(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2) \tag{57}$$

où on a supposé le spineur de départ, (α,β) non normalisé. Dans le cas où le spineur est normalisé, comme généralement supposé, son inverse est parfois appelé spineur conjugué, sans doute parce qu'il correspond à la matrice quaternion complexe conjuguée.

L'utilisation de spineurs et de matrices quaternions (7) non normalisés, nous amène à la liaison avec la norme de matrice. Ceci n'est pas utile pour l'algorithme SLR mais intervient dans la démonstration de la convergence de l'approximation par train d'impulsions dures. La norme d'une matrice complexe, de n'importe quel ordre, est ici supposée être

$$\|M\|^2 = \mathrm{Trace}(M^*M) = \mathrm{Trace}(MM^*). \tag{58}$$

Note : la possible inversion dans des deux facteurs du produit, provient de la propriété de permutabilité de la trace d'un produit $\mathrm{Trace}(\mathrm{AB}) = \mathrm{Trace}(\mathrm{BA})$ et ne suppose pas que la matrice M soit orthogonale ou normale (ce qu'elle sera par ailleurs dans notre cas). Dans le cas d'une matrice quaternion (7) non normée on trouve en suivant scrupuleusement la définition (58)

$$\|Q\|^2 = \|\alpha\|^2+\|\beta\|^2. \tag{59}$$

Si non normés les quaternions conservent cependant leur propriété d'orthogonalité

$$Q^*Q = QQ^* = \|Q\|^2\mathbf{1}. \tag{60}$$

D'où l'on déduit immédiatement, en utilisant de plus la permutabilité de la trace d'un produit, que la norme d'un produit de quaternion est le produit des normes

$$\|Q_1Q_2\| = \|Q_1\|\|Q_2\|. \tag{61}$$

On a souvent à suivre la norme d'une différence de matrices quaternions, normalisées ou pas. Étant donné deux matrices de type quaternion Q_1,Q_2 et leur différence $\varepsilon = Q_2 - Q_1$, la norme de cette différence est, par application du produit de matrice

$$\|\varepsilon\|^2 = \text{Trace}(\varepsilon^*\varepsilon) = \|Q_1\|^2 + \|Q_2\|^2 - \text{Trace}(Q_1^*Q_2 + Q_2^*Q_1), \tag{62}$$

ou en définissant la fonction $\alpha(Q)$ l'opération qui consiste à isoler la composante α (première ligne, première colonne) d'une matrice quaternion Q,

$$\|\varepsilon\|^2 = \text{Trace}(\varepsilon^*\varepsilon) = \|Q_1\|^2 + \|Q_2\|^2 - 2\Re(\alpha(Q_1^*Q_2)). \tag{63}$$

Aussi, mais sans nécessairement mettre ceci en relation avec l'équation précédente, on a

$$\|Q\|^2 = \Re^2(\alpha) + \Im^2(\alpha) + \Re^2(\beta) + \Im^2(\beta) \tag{64}$$

et on a de façon évidente

$$|\Re(\alpha(Q))| \leq \|Q\|. \tag{65}$$

Appliquant ceci à (63), on trouve les classiques relations

$$|\|Q_1\| - \|Q_2\|| < \|Q_1 - Q_2\| < \|Q_1\| + \|Q_2\|, \tag{66}$$

ou d'ailleurs

$$|\|Q_1\| - \|Q_2\|| < \|Q_1 + Q\| < \|Q_1\| + \|Q_2\|. \tag{67}$$

4.1.2. *Démonstration.* Pendant l'impulsion dure, l'aimantation subit une nutation pure le long de l'axe $-\omega_{1x}$,-ω_{1y}. On note $\varphi(i)$ l'angle de l'axe de cette rotation pendant l'impulsion dure, qui est aussi l'axe de la RF pendant tout l'intervalle de l'approximation bloquée d'ordre zéro $\tilde{\omega}_1$,

$$e^{j\varphi(i)} = -\omega_1(iT)/|\omega_1(iT)|. \tag{68}$$

Alors l'approximation par train d'impulsions dures revient à remplacer chacune des rotations d'axe $\vec{U(i)}$ (4) et d'angle ΩT (3) par une séquence de rotations

$$\mathcal{R}(\omega T/2, \vec{z}) \circ \mathcal{R}(\theta(i), \varphi(i)) \circ \mathcal{R}(\omega T/2, \vec{z}) \tag{69}$$

dont la combinaison est représentée par un quaternion que nous savons calculer facilement ((18),(26))

$$\hat{Q}(i) = \begin{bmatrix} c(i)Z^{1/2} & -js(i)\exp(-j\varphi(i)) \\ -js(i)\exp(j\varphi(i)) & c(i)Z^{-1/2} \end{bmatrix} \tag{70}$$

où on a introduit la variable Z , classique en traitement du signal échantillonné,

$$Z = e^{j\omega T}, \tag{71}$$

et aussi, suivant la notation de (26) $c(i) = \cos(T|\omega_1(iT)|/2)$, $s(i) = \sin(T|\omega_1(iT)|/2)$. Nous savons aussi calculer le quaternion correspondant signal $\tilde{\omega}_1$ bloqué à l'ordre zéro dans le même intervalle par application de (4) et (9)

$$\tilde{Q}(i) = \cos(\Omega T/2) - j\frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2}\begin{bmatrix} -\omega\frac{T}{2} & \omega_1\frac{T}{2}\exp(-j\varphi(i)) \\ \omega_1\frac{T}{2}\exp(j\varphi(i)) & \omega\frac{T}{2} \end{bmatrix} \tag{72}$$

avec la rotation efficace $\Omega = \sqrt{\omega^2 + |\omega_1|^2}$. En développant les fonctions trigonométriques, on s'aperçoit que les deux quaternions coïncident au moins jusqu'à l'ordre deux en T . La partie commune aux deux quaternions est de la forme

$$\breve{Q}(i) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}j\omega T - \frac{1}{8}\Omega^2T^2 & -j\omega_1\frac{T}{2}\exp(j\varphi(i)) \\ -j\omega_1\frac{T}{2}\exp(j\varphi(i)) & 1 - \frac{1}{2}j\omega T - \frac{1}{8}\Omega^2T^2 \end{bmatrix}. \tag{73}$$

A celle-ci s'ajoutent des matrices quaternions non normées qui sont proportionnelles à $(\omega T)^3$, $(\omega_1 T)^3$,$\omega^2\omega_1 T^3$,...

$$\hat{Q}(i) = \breve{Q}(i) + \hat{\mathcal{K}}\omega^3T^3 + \hat{\mathcal{K}}'\omega_1^3(i)T^3 + \hat{\mathcal{K}}''\omega_1^2(i)\omega T^3 + \ldots \tag{74}$$

et

$$\tilde{Q}(i) = \breve{Q}(i) + \tilde{\mathcal{K}}\omega^3T^3 + \tilde{K}'\omega_1^3(i)T^3 + \tilde{\mathcal{K}}''\omega_1^2(i)\omega T^3 + \ldots. \tag{75}$$

Ainsi en diminuant T, on peut espérer avoir un cumul des erreurs entre les deux représentations qui tend vers zéro si ω et $|\omega_1|$ sont bornés. Cependant en diminuant T on augmente aussi proportionnellement le nombre d'intervalles car la durée D est donnée. De plus en faisant le developpement des produits des quaternions correspondant à toute la longueur de la RF il n'est pas certain, le nombre de termes augmentant, qu'il y ait convergence ! Cela reste donc à démontrer.

Si nous divisons une onde RF (ou une portion d'onde RF) de durée D, en d intervalles de durée $T = D/d$, pour chacun de ces intervalles i, on peut toujours calculer entre les deux types de trajectoires, respectivement par impulsions dures, ou par signal bloqué, la matrice 'produit scalaire' suivante

$$\hat{Q}^*(i)\tilde{Q}(i) = \mathbf{1}_2 + \mathcal{K}\omega^3T^3 + \mathcal{K}'\omega_1^3(i)T^3 + \mathcal{K}''\omega_1(i)\omega^2T^3 + \ldots, \tag{76}$$

qui est une matrice unité jusqu'à l'ordre deux inclus d'après (74),(75) .

Par ailleurs le transfert global pour chacune des deux trajectoires est obtenu par multiplication des matrices élémentaires. Nous prenons un horizon variable k que finalement

nous ferons tendre vers d. Pour cet horizon k, et à une pulsation ω donnée les deux quaternions caractérisant la rotation résultante, par les deux types de modulations, sont (notant $\mathcal{Q}$ pour le produit résultant et Q les rotations élémentaires de chaque intervalle)

$$\hat{\mathcal{Q}}(k) = \prod_{i=1}^{k} \hat{Q}(i), \quad \tilde{\mathcal{Q}}(k) = \prod_{i=1}^{k} \tilde{Q}(i). \tag{77}$$

On peut caractériser la différence entre les deux trajectoires au temps k

$$\varepsilon(k) = \hat{\mathcal{Q}}(k) - \tilde{\mathcal{Q}}(k). \tag{78}$$

mais même mieux, sous forme d'un scalaire, par la somme des normes au carré des composantes de ce spineur non normalisé ε. De façon équivalente, cette somme s'exprime par la traditionnelle norme de matrice $\mathrm{Trace}(\varepsilon^*\varepsilon)$. Cependant les matrices $\hat{\mathcal{Q}}$ et $\tilde{\mathcal{Q}}$ sont elles mêmes normalisées et on obtient finalement comme norme de la différence entre les deux spineurs

$$J_k = 2 - \mathrm{Trace}(\hat{\mathcal{Q}}^*(k)\tilde{\mathcal{Q}}(k) + \tilde{\mathcal{Q}}^*(k)\hat{\mathcal{Q}}(k)), \tag{79}$$

qu'on note

$$J_k = 2 - \mathrm{Trace}(\mathrm{M(k)} + \mathrm{M^*(k)}), \tag{80}$$

avec

$$M(k) = \hat{\mathcal{Q}}^*(k)\tilde{\mathcal{Q}}(k). \tag{81}$$

$M(k)$ est par ailleurs une matrice orthogonale (ou quaternion), de type (7), $M(k) = Q(\alpha(k), \beta(k))$ et le critère de convergence quadratique (79) s'écrit finalement

$$J(k) = 2 - 2\Re(\alpha(M(k))). \tag{82}$$

Cherchons maintenant à expliciter sous forme récursive (nous sommes à une pulsation de résonance ω donné) $M(k)$. Pour $k = 1$, on a $\hat{\mathcal{Q}}(1) = \hat{Q}(1)$ et $\tilde{\mathcal{Q}}(1) = \tilde{Q}(1)$ et donc d'après (81) et(76)

$$M(1) = \mathbf{1} + \mathcal{K}\omega^3 T^3 + \mathcal{K}'\omega_1^3(1)T^3 + \mathcal{K}''\omega_1(1)\omega^2 T^3 + \ldots \tag{83}$$

où les matrices coefficients $\mathcal{K}, \mathcal{K}', \ldots$ sont des matrices quaternion, mais non normés, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 1$ à coefficients finis et connus. Après le deuxième intervalle ($k = 2$), en utilisant ce dernier résultat et les récursions (77)

$$M(2) = \hat{Q}^*(2)M(1)\tilde{Q}(2) \tag{84}$$

et séparant du développement la partie "**1**" de $M(1)$ des autres on obtient

$$M(2) = \hat{Q}^*(2)\tilde{Q}(2) \quad \hat{Q}^*(2)(\mathcal{K}\omega^3T^3 + \mathcal{K}'\omega_1^3(1)T^3 + \mathcal{K}''\omega_1(1)\omega^2T^3)\tilde{Q}(2), \tag{85}$$

et appliquant de nouveau (76) à $\hat{Q}^*(2)\tilde{Q}(2)$

$$M(2) = \mathbf{1} + \mathcal{K}\omega^3T^3 + \mathcal{K}'\omega_1^3(2)T^3 + \mathcal{K}''\omega_1(2)\omega^2T^3 \quad \hat{Q}^*(2)(\mathcal{K}\omega^3T^3 + \mathcal{K}'\omega_1^3(1)T^3 + \mathcal{K}''\omega_1(1)\omega^2T^3)\tilde{Q}(2). \tag{86}$$

Considérons maintenant l'un des termes restant en deuxième ligne, par exemple, $\hat{Q}^*(2)\mathcal{K}\tilde{Q}(2)$ facteur de ω^3T^3. C'est encore une matrice quaternion non normée, mais de norme de matrice égale à la norme originale $\|\mathcal{K}\|$ de la matrice $\mathcal{K}$ car $\hat{Q}(2)$ et $\tilde{Q}(2)$ sont, elles, normalisées. Ce terme va s'ajouter au terme identique (facteur de ω^3T^3) de la première ligne $\mathcal{K}$. Il semble donc que chacun des termes va augmenter au plus linéairement. Soyons maintenant plus précis et supposons qu'on puisse mettre $M(k)$ sous la forme

$$M(k) = \mathbf{1} + \mathcal{G}(k)\omega^3T^3 + \mathcal{G}'(k)T^3 + \mathcal{G}''(k)\omega^2T^3, \tag{87}$$

où $\mathcal{G}$ sert d'accumulateur des termes en ω^3, $\mathcal{G}'$ sert d'accumulateur des termes en $\omega_1^3(k)$, $\mathcal{G}''$sert d'accumulateur des termes en $\omega_1(k)\omega^2$, etc . Effectuant maintenant la récurrence

$$M(k) = \hat{Q}^*(k)M(k-1)\tilde{Q}(k), \tag{88}$$

on obtient par exemple pour $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G}(k) = \mathcal{K} + \hat{Q}^*(k)\mathcal{G}(k-1)\tilde{Q}(k). \tag{89}$$

et d'après les inégalités de norme de matrices (67)

$$\|\mathcal{G}(k)\| < \|\mathcal{K}\| + \|\mathcal{G}(k-1)\| \tag{90}$$

et donc par récurrence, simplement

$$\|\mathcal{G}(k)\| < k\|\mathcal{K}\|. \tag{91}$$

On trouve de façon similaire pour $\mathcal{G}'$qui

$$\|\mathcal{G}'(k)\| < \|\mathcal{K}'\|\omega_1^3(k) + \|\mathcal{G}'(k-1)\|, \tag{92}$$

et si, pour simplifier, l'excitation RF est bornée $|\omega_1(k)| < \omega_{1M}$, on obtient

$$\|\mathcal{G}'(k)\| < k\|\mathcal{K}'\|\omega_{1M}^3. \tag{93}$$

On traite identiquement $\mathcal{G}''$et autres termes et finalement en posant

$$M(k) = \mathbf{1} + N(k) \tag{94}$$

on trouve que la norme de $N(k)$ ne peut pas croître plus vite que linéairement en fonction de l'index k,

$$\|N(k)\| < (\|K\|\omega^3 + \|K'\|\omega_{1M}^3 + \|K''\|\omega^2\omega_{1M} + \ldots)kT^3. \tag{95}$$

Revenant maintenant au critère quadratique de convergence (82) entre les deux trajectoires au temps k

$$J(k) = 2 - 2\Re(\alpha(M(k))) = 2 - 2\Re(\alpha(\mathbf{1} + N(k))) = -2\Re(\alpha(N(k))) \tag{96}$$

et comme on a nécessairement $|\Re(\alpha(N))| < \|N\|$on a

$$J(k) < 2\|N(k)\| < 2(\|K\|\omega^3 + \|K'\|\omega_{1M}^3 + \|K''\|\omega^2\omega_{1M} + \ldots)(kT^3) \tag{97}$$

Faisant maintenant $k = d$ et $T = D/d$, on trouve que le critère de convergence quadratique J_d, varie comme dT^3 c'est à dire $1/d^2$ ou T^2 ; les deux trajectoires convergent donc au sens des moindres carrés quand $T \to 0$, ou quand le nombre de points d de définition de la RF augmente et tend vers l'infini : $d \to \infty$.

CHAPITRE 2

Impulsions Sélectives, l'algorithme *SLR*.

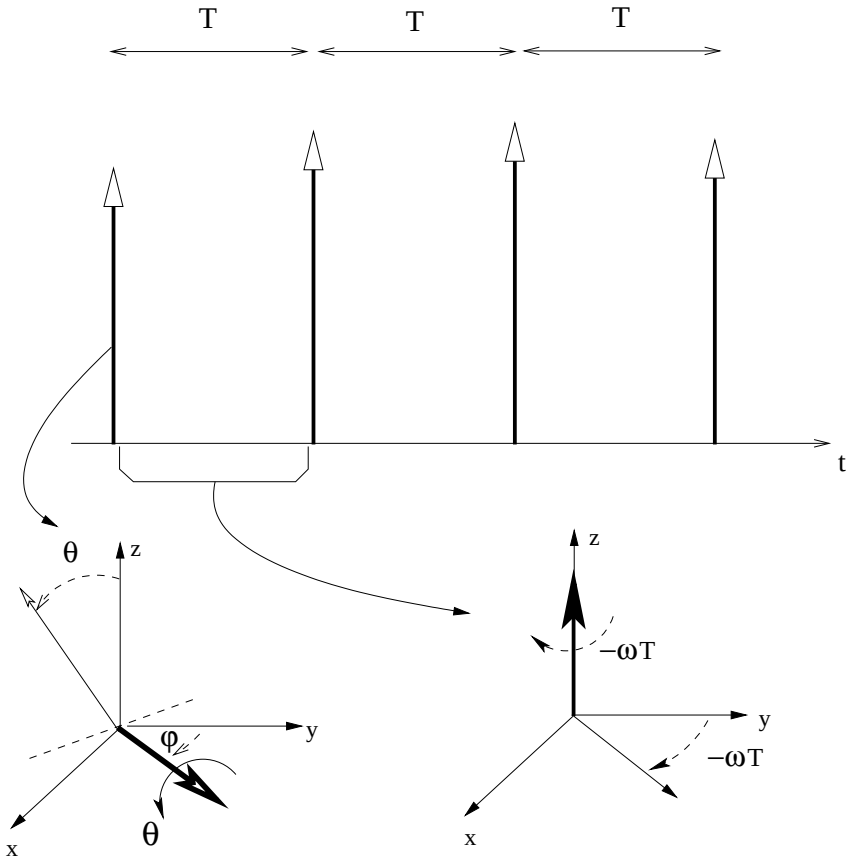

FIG. 1. Le modèle de train d'impulsions dures séparées par des périodes de précession de durée constante sont la base de l'analyse polynomiale utilisée dans l'algorithme *SLR* . Traditionnellement la phase de l'émission radio fréquence y est repérée à partir de l'axe $\vec{y}$ du repère tournant.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder l'algorithme *SLR* sans difficulté. Cet algorithme est en soi très simple, s'écrit sous forme de quelque lignes de code et correspond à une récursion sur deux signaux de longueur finie. Ce sera l'objet de la première section. Cependant autour de cette récursion se greffe tout l'attirail de synthèse de ces deux signaux à partir des spécifications. C'est cette partie de l'algorithme qui, bien qu'utilisant des outils classiques de traitement du signal, est la plus lourde à mettre en oeuvre (tout en restant très raisonnable en comparaison d'algorithmes concurrents). Elle fera l'objet de la deuxième section. La mention de quelques extensions et travaux postérieurs suivront.

1. L'algorithme polynomial *SLR* proprement dit.

1.1. Simulation (analyse) d'un train d'impulsions dures par une récursion polynomiale. Nous supposons donc que nous est donnée une série d'impulsions dures, séparées l'une de l'autre par un temps T, chacune caractérisée par un angle de nutation θ_i et un angle φ_i qui repère, dans le plan x, y, l'axe de cette nutation. Il est courant dans l'algorithme SLR de repérer cet angle φ_i à partir de l'axe $\vec{y}$, simplement pour conserver si possible des quantités réelles dans le cas où l'onde radio fréquence n'est pas modulée en phase. On suppose

alors dans ce cas que le champ $b_1(t)$ est émis le long de l'axe y du repère tournant, voir figure (1). Il est courant aussi de numéroter la première impulsion par $i=0$, et donc si le train comporte n impulsions la dernière sera numérotée $n-1$. L'impulsion générique d'index i a comme quaternion représentatif celui de la nutation générale (26) qui avec l'adaptation due au changement de la référence de phase le long de $\vec{y}$ devient

$$Q_i = \begin{bmatrix} c_i & -\bar{s}_i \\ s_i & c_i \end{bmatrix},\ c_i = \cos(\theta_i/2), \quad s_i = e^{j\varphi_i}\sin(\theta_i/2). \tag{98}$$

Entre chacune de ces impulsions dures, le système évolue sous la seule influence de la pulsation de résonance ω. Ainsi l'élément de magnétisation placé à la pulsation de résonance ω effectue une précession d'un angle ωT, entre la fin d'une des impulsions et le début de la suivante. Cette précession est représentée par le quaternion $Q(-\omega T,\vec{z})$, qu'on note Q_z, afin d'alléger l'écriture. Rappelons que d'après (18) ce quaternion est

$$Q_z = \begin{bmatrix} \exp(j\omega T/2) & 0 \\ 0 & \exp(-j\omega T/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{1/2} & 0 \\ 0 & Z^{-1/2} \end{bmatrix}. \tag{99}$$

Dans la deuxième version de l'écriture de Q_z on a utilisé la variable

$$Z = e^{j\omega T}. \tag{100}$$

Cette notation est conforme à la notation utilisée en traitement du signal échantillonné à la période T et son étude par la transformée en Z [**52, 51**].

On décide de suivre la rotation globale subie par chacune des magnétisations depuis le début de l'impulsion 0 jusqu'à la fin de l'impulsion i. On décide de caractériser cette rotation, à un ω donné, par sa matrice quaternion $\mathcal{Q}_i = Q(\alpha_i,\beta_i)$; il est aussi utile de noter $\mathcal{Q}_i^-(\alpha_i^-,\beta_i^-)$ le quaternion représentatif de la rotation du début de l'impulsion 0 au début de l'impulsion i. Par définition on a donc $\mathcal{Q}_0^- = \mathbf{1}$. Aussi, par vertu du fait que le quaternion d'une combinaison de rotations est le produit ordonné des quaternions correspondant, le quaternion représentatif de la suite temporelle d'opérations "nutation 0, précession, nutation 1, …, précession, nutation $(i-1)$, précession, nutation i" est

$$\mathcal{Q}_i = Q_i Q_z Q_{i-1} Q_z \dots Q_1 Q_z Q_0 \mathbf{1}, \tag{101}$$

qu'on peut aussi écrire de façon récursive

$$\mathcal{Q}_i = Q_i Q_z \mathcal{Q}_{i-1} \quad \text{avec } \mathcal{Q}_0 = Q_0. \tag{102}$$

si on décide de suivre la récursion de la *fin* d'impulsion $i-1$ à *fin* d'impulsion dure i. On note que c'est le transfert du *début* d'impulsion 0 à la fin d'impulsion i qui nous intéresse, et

donc la première impulsion est traitée un peu différemment des autres et entre directement sous forme de la condition initiale $Q_0 = Q_0$.

Et en explicitant les matrices Q_i et Q_z et aussi les matrices Q_i et Q_{i-1} en fonction de leurs composantes α et β, la récursion s'écrit

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & -\bar{\beta}_i \\ \beta_i & \bar{\alpha}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i & -\bar{s}_i \\ s_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{1/2} & 0 \\ 0 & Z^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{i-1} & -\bar{\beta}_{i-1} \\ \beta_{i-1} & \bar{\alpha}_{i-1} \end{bmatrix}, \tag{103}$$

avec la condition initiale

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & -\bar{\beta}_0 \\ \beta_0 & \bar{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & \bar{s}_0 \\ s_0 & c_0 \end{bmatrix}. \tag{104}$$

Comme nous le savons les matrices quaternions ne dépendent que de leur première colonne et on peut se contenter d'une récursion uniquement sur celle-ci ; il faut cependant toujours garder à l'esprit que l'on peut régénérer facilement une matrice unitaire à partir de cette unique colonne. Donc on peut se contenter de l'écriture

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i & -\bar{s}_i \\ s_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{1/2} & 0 \\ 0 & Z^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{i-1} \\ \beta_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ s_0 \end{bmatrix}. \tag{105}$$

En effectuant une ou deux récursions on s'aperçoit qu'on obtient rapidement des polynômes, ou plutôt des séries de Laurent, contenant des termes en puissance de $Z^{1/2}$et $Z^{-1/2}$. En fait, on peut se ramener à de simples polynômes de la variable Z^{-1} en mettant en facteur le monome principal (le plus grand ordre en $Z^{1/2}$) de α_i qui est, on peut s'en assurer rapidement, $Z^{i/2}$

$$\begin{array}{rcl} \alpha_i & = & Z^{i/2} A_i \\ \beta_i & = & Z^{i/2} B_i \end{array}. \tag{106}$$

Alors la récursion (105) devient

$$\begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i & -\overline{s_i} \\ s_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ s_0 \end{bmatrix}, \tag{107}$$

qui après développement du produit devient

$$\begin{array}{rcl} A_i(Z) & = & c_i A_{i-1}(Z) - \bar{s}_i Z^{-1} B_{i-1}(Z) \\ B_i(Z) & = & s_i A_{i-1}(Z) + c_i Z^{-1} B_{i-1}(Z) \end{array}, i = 1 \ldots n, \quad \begin{array}{rcl} A_0 & = & c_0 \\ B_0 & = & s_0 \end{array}. \tag{108}$$

Effectuons explicitement les deux premières récursions. On obtient

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ s_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_0 - \bar{s_1} s_0 Z^{-1} \\ s_1 c_0 + c_1 s_0 Z^{-1} \end{bmatrix}. \tag{109}$$

Ceci pourrait nous faire penser qu'effectivement les quantités A et B pourraient bien être des polynômes de la variable Z^{-1}. On le prouve par récurrence, en supposant que les variables A_{i-1} et B_{i-1}, sont des polynômes d'orde $i-1$ en Z^{-1} et s écrivent

$$\begin{aligned} A_{i-1} &= a_{i-1,0} + a_{i-1,1}Z^{-1} + \ldots + a_{i-1,k}Z^{-k} \ldots + a_{i-1,i-1}Z^{-(i-1)} \\ B_{i-1} &= b_{i-1,0} + b_{i-1,1}Z^{-1} + \ldots + b_{i-1,k}Z^{-k} + \ldots + b_{i-1,i-1}Z^{-(i-1)}, \end{aligned} \tag{110}$$

où on assigné le premier indice, i, des coefficients $a_{i,k}$ et $b_{i,k}$ au numéro d'ordre temporel, et le deuxième indice, k, à l'ordre du monome correspondant.

Effectuant alors la récursion (107) on trouve bien que, après l'impulsion i , les variables a et b sont de la forme

$$\begin{aligned} A_i(Z) &= a_{i,0} + a_{i,1}Z^{-1} + \ldots + a_{i,i}Z^{-i} \\ B_i(Z) &= b_{i,0} + b_{i,1}Z^{-1} + \ldots + b_{i,i}Z^{-i}. \end{aligned} \tag{111}$$

D'une façon plus explicite, les coefficients d'ordre k , sont obtenus par

$$\begin{aligned} a_{i,k} &= c_i a_{i-1,k} - \bar{s}_i b_{i-1,k-1} \\ b_{i,k} &= s_i a_{i-1,k} + c_i b_{i-1,k-1}, \end{aligned} \tag{112}$$

pour les ordres k tels que $1 \leq k \leq i-1$. Cependant les équations sont plus simples pour les coefficients de 'bord' $k = 0$ et $k = i$. Pour $k = 0$ on a la récursion simple

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= c_i a_{i-1,0} \\ b_{i,0} &= s_i a_{i-1,0}, \end{aligned} \tag{113}$$

et pour $k = i$, on a la récursion

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= -\bar{s}_i b_{i-1,i-1} \\ b_{i,i} &= c_i b_{i-1,i-1}. \end{aligned} \tag{114}$$

Ces équations conduisent à des expressions analytiques pour les coefficients de bord. Le plus important d'entre eux est le coefficient d'ordre zéro ($k = 0$) de la quantité a , car il est relié à l'énergie de l'impulsion sélective comme nous le verrons. Ce terme s'écrit, en 'intégrant' la première ligne de (113), sous la forme du produit des cosinus des moitiés de nutations

$$a_{i,0} = c_i c_{i-1} \ldots c_0. \tag{115}$$

Les trois autres coefficients d'extrémité sont obtenus de manière identique et s'écrivent

$$
\begin{aligned}
b_{i,0} &= s_i c_{i-1} \dots c_1 c_0 \\
b_{i,i} &= c_i c_{i-1} \dots c_1 s_0 \\
a_{i,i} &= -\bar{s}_i c_{i-1} \dots c_1 s_0.
\end{aligned} \tag{116}
$$

On note que, par exemple, la connaissance des termes $a_{i,0}$ et $b_{i,0}$ permet de connaître par division la quantité s_i/c_i et donc la nutation et la phase d'émission du dernier Dirac émis. Ceci sera la base de l'algorithme d'inversion. Cependant et afin d'acquérir une intuition du processus de calcul en jeu, il est utile de consulter auparavant la figure (2). Elle donne une vue synthétique de la récursion (108) appliquée, pour des raisons de clarté, à un train réduit de dix impulsions, simulant cependant déjà bien un onde continue formant une exponentielle décroissante. On vérifie visuellement sur cette figure la propriété essentielle introduite dans ce paragraphe : les quantités spinorielles $A_i(Z)$, $B_i(Z)$ après la $i+1$ ème impulsion (ou impulsion de numéro d'ordre i) sont des polynômes d'ordre i. Par ailleurs, la figure suivante (3) détaille la récursion (107) ou (108) en prenant l'exemple du passage, de la fin de l'impulsion d'index temporel 6 à la fin de l'impulsion d'index temporel 7 du train précédent.

Un paramètre simple mais important d'une onde radio fréquence est son intégrale car elle correspond à la rotation imposée à un décalage de fréquence de résonance nul, tout du moins lorsque cette impulsion n'est pas modulée en phase. Ici l'intégrale, ou plutôt la somme des nutations θ_i, a été choisie égale à π, c'est à dire une nutation loin d'être petite et en tout cas de l'ordre du maximum que l'on puisse demander à une onde continue de sélection en fréquence. On note que malgré cela le coefficient d'ordre zéro $a_{i,0}$ est toujours dominant et reste proche de 1. Le fait aurait été encore plus marqué pour une nutation plus petite que π. Et il en sera ainsi tant que l'énergie de l'impulsion restera finie et à des valeurs raisonnables ; en pratique, pour un train d'impulsions dures qui n'est qu'un modèle d'une impulsion continue sélective, la forte prédominance du terme d'ordre 0, $a_{i,0}$, sera vérifié tant que, en aucune fréquence, on ne demandera à l'impulsion d'appliquer plus de un ou quelques tours. Il en sera évidemment tout autrement lorsqu'on tentera d'analyser des longs trains d'impulsions concrets de forte puissance et non pas un train modélisant une onde continue d'énergie finie. Par exemple dans un train d'échos de spins CPMG avec des impulsions dont chacune applique une nutation de 90, 120 ou 150 degrés, l'énergie totale diverge rapidement, et le coefficient $a_{i,0}$ tend rapidement vers zéro. Et dans ces conditions, disons le tout de suite, l'algorithme d'inversion *SLR* qui repose, en pratique si ce n'est en principe, sur le fait que le coefficient $a_{0,i}$ est grand, sera tout à fait inapplicable.

Mais afin d'aborder cet algorithme d'inversion dans des conditions confortables, et aussi pour mentionner au passage l'existence d'un algorithme directe rétrograde, il nous faut revenir sur la récursion en l'écrivant sous forme de matrices, et non plus uniquement sous forme de spineur. Revenant donc à l'équation (103), et effectuant le changement de variable (106), on obtient la récursion matricielle

$$\begin{bmatrix} A_i & -B_i^R \\ B_i & A_i^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i & -\bar{s}_i \\ s_i & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i-1} & -B_{i-1}^R \\ B_{i-1} & A_{i-1}^R \end{bmatrix} \tag{117}$$

où on a noté les polynômes 'renversés'

$$\begin{aligned} A_i^R(Z) = Z^{-i}\overline{A_i(Z)} &= \overline{a_{i,i}} + \overline{a_{i,i-1}}Z^{-1} + \ldots + \overline{a_{i,0}}Z^{-i} \\ B_i^R(Z) = Z^{-i}\overline{B_i(Z)} &= \overline{b_{i,i}} + \overline{b_{i,i-1}}Z^{-1} + \ldots + \overline{b_{i,0}}Z^{-i}, \end{aligned} \tag{118}$$

obtenus en renversant l'ordre des coefficients et aussi en les conjuguant. Ces quantités A_i^Ret B_i^R sont encore des polynômes d'ordre $0..i$ de la variable Z^{-1}. Ainsi la matrice obtenue après l'impulsion dure numéro i est une matrice formée de polynômes d'ordre i.

Les matrices quaternions modifiées

$$Q_i' = \begin{bmatrix} A_i & -B_i^R \\ B_i & A_i^R \end{bmatrix} = Z^{-i/2} Q_i, \tag{119}$$

avec comme cas particulier pour la période de précession

$$Q_z' = Z^{-1/2} Q_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix}, \tag{120}$$

ne sont plus stricto sensu du type SU_2 tel que défini précédemment car la relation de phase entre les termes diagonaux et antidiagonaux n'y est plus respectée. Cependant ces matrices restent unitaires et en particulier leur inverse est obtenu par conjugaison :

$$\begin{bmatrix} A_i & -B_i^R \\ B_i & A_i^R \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{A_i} & \overline{B_i} \\ -\overline{B_i}^R & A_i^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A_i} & \overline{B_i} \\ -Z^i B_i(Z) & Z^i A_i(Z) \end{bmatrix}.$$

La récursion matricielle (117) , qu'on peut donc aussi écrire de façon condensée

$$Q_i' = Q_i Q_z' Q_{i-1}', \tag{121}$$

est strictement équivalente à la récursion sur la première colonne (107). Cependant le fait de pouvoir écrire les matrices inverses rend plus facile l'exposé de l'algorithme d'inversion. L'écriture complète sous forme de matrice permet également l'introduction d'une récursion rétrograde mais, pour ne pas alourdir l'exposé, nous présentons celle-ci en annexe.

1.2. Forme générale des fonctions a,b,α,β . Une utilisation de l'algorithme de simulation dans le cas d'impulsions sélectives de type sinus cardinal, susceptibles de sélectionner suffisamment bien des bandes de fréquences, est présentée en figure (4). On a utilisé les équations de simulation (112) avec un nombre n d'intervalles suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler les polynômes à des signaux continus. On remplace donc dans cette figure l'indice k des équations précédentes par le temps virtuel, voir paragraphe (3.3.2),

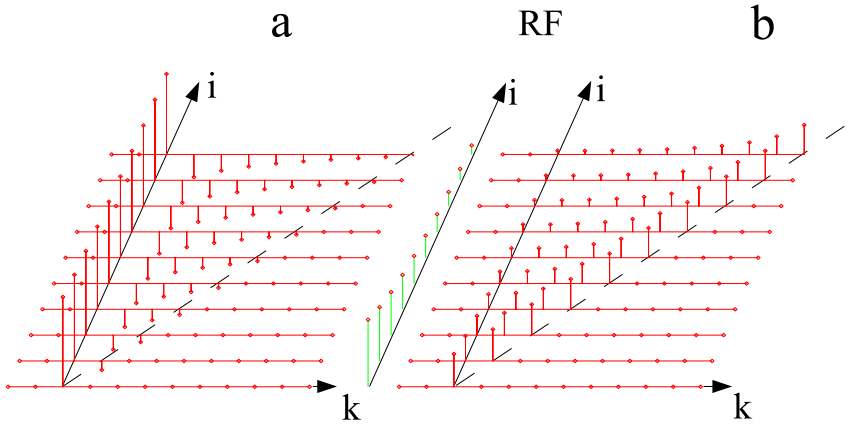

FIG. 2. Vue en perspective de la récurrence polynomiale directe (108), appliquée à une excitation radio fréquence formée d'un train de dix impulsions formant une série géométrique décroissante $\theta(i) = (\Theta/9)\exp(-i/5)$, $i = 0,9$ comme montrée, en vert, au centre de la figure. Après l'impulsion numéro i chacune des valeurs $A(Z)$, $B(Z)$ sont des polynômes d'ordre i en Z^{-1}. Autrement dit les répartitions fréquentielles des spineurs $[a(\omega), b(\omega)]$ sont des filtres RIF (réponse impulsionelle finie) ou FIR (finite impulse response), de support $k = 0, i$. Ceci est vérifié aisément sur la figure, où tous les coefficients sont nuls en dehors du triangle $0 \leq k \leq i$, dont les limites sont marquées par les lignes noires continues et en pointillé. On note que le coefficient d'ordre zéro $a(i,0)$ est très élevé, et ceci bien que la nutation à la fréquence zéro Θ ait été réglée à une valeur non négligeable $\Theta = \pi$. Ce n'est que pour des trains générant des rotations de plusieurs tours en une ou plusieurs fréquences que le coefficient $a(i,0)$ devient petit. On note également que le signal formé par les coefficients $b_{i,k}$, à i fixé, et donc avec k variant de 0 à i, est dans sa forme générale la modulation *RF* passée et renversée dans le temps $b_{i,k} \approx \theta(i-k)/2$.

$\tau = kT$. Sont montrés sur cette figure, les signaux temporels $\alpha_n(\tau)$ et $\beta_n(\tau)$ et les 'coefficients' $a_n(\tau)$, $b_n(\tau)$, transformées de Fourier inverses respectivement de $\alpha_n(\omega)$,$\beta_n(\omega)$, $A_n(\omega)$, $B_n(\omega)$. D'après (106)

$$\begin{aligned} \alpha_n(\omega) &= e^{j\omega D/2} A_n(\omega) \\ \beta_n(\omega) &= e^{j\omega D/2} B_n(\omega), \end{aligned} \tag{122}$$

les signaux $\alpha_n(\tau)$ et $\beta_n(\tau)$ ont leur origine au milieu $D/2$ de l'intervalle $[0, D = nT]$, alors que les signaux $a_n(\tau)$ et $b_n(\tau)$ sont comptés à partir du début de l'intervalle :$\alpha_n(\tau) = a_n(\tau + D/2)$, $\beta_n(\tau) = b_n(\tau + D/2)$. Nous laissons de coté désormais l'indice n, sachant que nous nous occupons uniquement des valeurs des signaux en fin d'excitation *RF* au temps $t = nT = D$. De la figure (4) on déduit à nouveau que $b(\tau)$ est assez peu différent, dans sa forme générale de $\omega_1(t)$, avec le temps virtuel $\tau = D - t$, où l'origine des temps physiques $t = 0$ est au début de la radiofréquence. D'ailleurs dans l'hypothèse 'petits angles' on a tout simplement

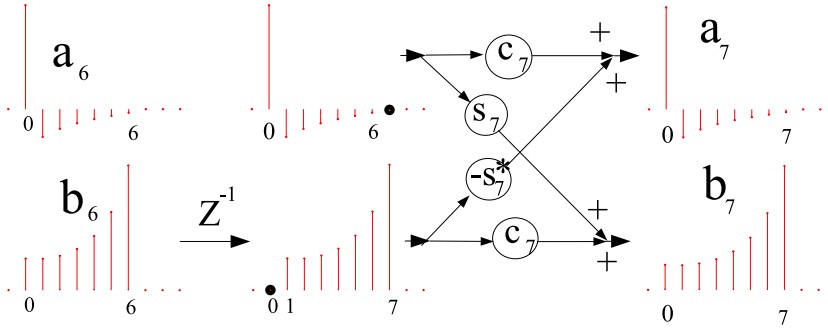

FIG. 3. Décomposition des opérations de la récursion donnée par (107) ou (108), entre la fin de l'impulsion numéro 6 et la fin de l'impulsion numéro 7 du train de dix impulsions tel que montré à la figure (2). Le signal b_6, de longueur 7 ($k = 0 \ldots 6$), est d'abord décalé de un pas vers la droite par l'opérateur Z^{-1}. Il s'étend alors de $k = 1$ à $k = 7$ avec donc, remarque importante, un coefficient d'ordre zéro inexistant. Puis la nutation imposée par l'impulsion dure d'ordre 7 (la huitième du train) combine les deux signaux a et b par une opération de type papillon, résultant en des signaux s'étalant sur l'intervalle $k = 0 \ldots 7$. On note, d'après la remarque précédente, que les nouveaux coefficients d'ordre zéro, $a_{7,0}$, et $b_{7,0}$ sont obtenus par multiplication de l'ancien $a_{6,0}$ respectivement par $c_7 = \cos(\theta_7/2)$ et $s_7 = \sin(\theta_7/2)$, sans aucune autre addition. Donc la connaissance de ces deux seuls coefficients permet de déduire la valeur de la dernière impulsion dure appliquée. Ceci est la base de l'algorithme d'inversion.

$$
\begin{aligned}
a(\tau) &\simeq \delta(\tau) \\
b(\tau) &\simeq 0.5T\omega_1(t = D - \tau).
\end{aligned}
\tag{123}
$$

Ceci est trouvé en supposant dans (108), que A_i est pratiquement toujours egal à 1, et ce pour toutes les fréquences ω ; il ne suffit plus ensuite qu'à assimiler s_i à $\theta_i/2$ dans (112) qui est égal à la pulsation radiofréquence instantanée $\omega_1(t)$ multiplié par T. Dans le cas d'angle global en bande passante élevé, de l'orde de 180°, il y a une assez forte distorsion de la forme d'onde entre ω_1 et b, essentiellement caractérisée par une sorte de saturation aux hautes valeurs de nutation instantanée : il est utile à ce sujet de voir la deformation et le tassement de $b(\tau)$ sur la figure (4) en haut à gauche, quand on passe de 30° à 90° puis de 90° à 180° d'angle de nutation au centre de la bande passante. Malgré tout, ce décourt temporel conserve sa forme générale. On peut par exemple prouver, indépendamment du niveau d'excitation, que si la radiofréquence est à symétrie hermitienne $\omega_1(t) = \bar{\omega}_1(D - t)$, la fonction $b(\tau)$ présente la même symétrie $b(\tau) = \bar{b}(D - \tau)$, et donc $B(\omega)$ a une phase purement linéaire $\angle B(\omega) = -\omega D/2$. Ceci signifie que le signal $\beta(\tau)$, qui lui est centré au milieu de l'intervalle, a une transformée de Fourier qui est à phase nulle $\angle\beta(\omega) = 0$, ce qu'on peut vérifier sur la figure (4) en bas à gauche.

Plus généralement, dans le cas d'excitations non symétriques, mais encore à bande étroite comme pour les impulsions à phase minimum que nous utiliserons, on peut admettre en première approximation que la composante linéaire de la phase $B(\omega)$ est liée à la position τ_m du maximum du signal $b(\tau)$, lui-même lié de façon assez proche à la position t_m du maximum du signal d'excitation $\omega_1(t = t_m) \geq \omega_1(t)$; c'est à dire qu'en toute première approximation, on a $\tau_m = D - t_m$ et que la partie linéaire de la phase de $B(\omega)$ est $\angle B(\omega) = -(D - t_m)\omega$. De ceci on déduit que la composante $\beta(\omega)$ du spineur a un retard de groupe $D/2 - t_m$, c-a-d, en résumé que :

$$\angle\beta(\omega) \simeq (-D/2 + t_m)\omega. \tag{124}$$

En ce qui concerne la première composante du spineur α on remarque de nouveau que, même à grands angles, le maximum du signal est toujours concentré près de $\tau = 0$ et c'est donc $A(\omega)$ qui est a priori à phase lentement variable, ce qu'on vérifie sur la figure (4) en bas à droite. Il reste *dans la bande passante* une phase de compensation, en fait une avance de phase comme disent les automaticiens, quasi linéaire dont la pente augmente avec l'angle de nutation dans la coupe,

$$\begin{aligned} \angle A(\omega) &\simeq \tau_a\omega \\ \angle\alpha(\omega) &\simeq (\tau_a + D/2)\omega. \end{aligned} \tag{125}$$

Traduisons maintenant ces observations en termes plus physiques. Comme indiqué au paragraphe (2.5.1) la rotation peut toujours se caractériser par une précession d'angle $\varphi_1 = -\angle\alpha - \angle\beta$, suivie d'une nutation pure autour de y d'angle $\Theta = 2\arcsin\beta$, suivie d'une précession d'angle $\varphi_2 = -\angle\alpha + \angle\beta$. Utilisant (125)et (124), pour les aimantations situées dans la bande passante, la première précession est d'angle $-(t_m + \tau_a)\omega$ et correspond ainsi à une précession libre de durée $t_m + \tau_a$. On se rappelle en effet que, d'après nos conventions du chapitre 1, l'aimantation de pulsation de résonance ω tourne de $-\omega t$ pendant un intervalle de temps t. Vient ensuite une nutation d'angle Θ_1 , 30°,90°,180° dans les exemples de la figure (4), quasi uniforme dans toute la bande passante et d'axe y. On peut donc, si on se limite à cette bande passante, considérer cette impulsion comme une impulsion dure. Puis vient enfin une précession d'angle $(-D + t_m - \tau_a)\omega$, correspondant à une précession libre de durée $D - t_m + \tau_a$. Recapitulant la durée des précessions, $t_m + \tau_a$ avant le maximum (situé on le rappelle par définition à t_m après le début de la *RF*), $D - t_m + \tau_a$ après le maximum, on réalise que tout se passe comme si un même intervalle de temps τ_a avait été ajouté de part et d'autre de l'intervalle originale D. Ceci est la raison pour laquelle, dans le cas d'une impulsion de bascule, le point temporel de phase nulle (ou la position de la nutation Θ dure équivalente à l'onde RF) ne parait pas être au point $t_m$du maximum de l'onde $\omega_1(t)$, mais semble le précéder légèrement. On trouve en effet par simulation ou expérimentalement que le temps de rephasage est allongé, de quelques pour cent. Cependant cette vision d'un décalage temporel du centre est fausse, particulièrement s'il faut prendre en compte une aimantation transversale avant l'impulsion, et pas uniquement une aimantation longitudinale,

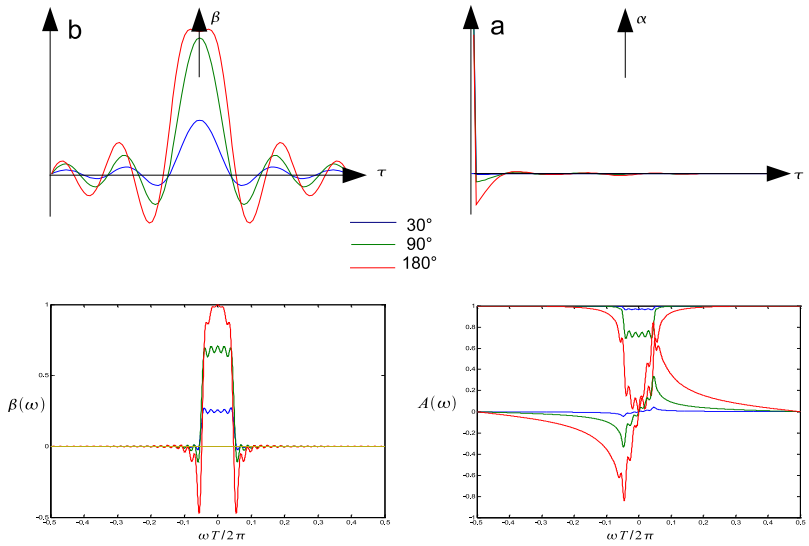

FIG. 4. Résultat de la simulation par l'algorithme directe (112) avec un nombre n d'intervalles suffisamment grand (quelques centaines) pour que la forme d'entrée θ_i, $i = 1,n$ soit une repésentation fidèle du signal continu $\omega_1(t)$ choisi ici comme une fonction sinus cardinal tronquée, et que les coefficients des polynômes $a_{n,k}$, $b_{n,k}$puissent être vus comme des 'signaux' du temps virtuel τ, $\tau = kT$. L'amplitude de cette fonction a été adaptée de façon à ce que l'angle de nutation imposée à la fréquence de résonance zéro soit successivement 30°, 90° et enfin 180°. Suivre la discussion dans le texte, paragraphe (1.2).

comme c'est le cas dans une experience de bascule. Pour avoir un modèle plus conforme à la réalité il faut, comme démontré ci dessus, avoir la vision d'une augmentation globale et symétrique du support temporel, d'une valeur τ_a de chaque coté. Ou de façon equivalente on peut s'imaginer une augmentation du gradient de sélection, sans réduction concomitante de l'épaisseur de coupe ; et peut-être finalement, la meilleure façon de visualiser l'influence de τ_a est, tout au moins en imagerie, l'addition de part et d'autre de l'impulsion de deux petites formes de gradient d'écrasage.

1.3. Synthèse ou inversion, l'algorithme *SLR*. On retiendra de la section précédente que la rotation d'ensemble imposée par un train de $n+1$ impulsions dures est, en n'importe quelle fréquence ω, caractérisée par un quaternion Q_n déterminé lui-même par deux composantes A_n, B_n qui

- sont des *polynômes d'ordre n* de la variable $Z = \exp(j\omega)$.
- en tant que composantes d'un spineur, vérifient pour tout ω la contrainte de normalisation (8), écrite à nouveau ici

$$|A_n(Z)|^2 + |B_n(Z)|^2 = 1. \tag{126}$$

1.3.1. *La spécificité de SLR.* On peut considérer ces deux conditions comme des conditions nécessaires. C'est à dire qu'étant donné une matrice Q_u dont les composantes ne vérifient pas l'une de ces deux conditions, alors cette matrice ne peut pas être le quaternion représentatif d'une rotation produite par un train *fini* de $n+1$ impulsions et il est donc inutile de chercher un tel train. C'est pourquoi les algorithmes de type *IST* (Inverse scattering transform) [**59, 60, 61, 62**] qui ne prennent pas en compte la contrainte polynomiale, ne peuvent que générer des impulsions de support temporel infini correspondant à des fonctions rationnelles de la fréquence (Reponse Impulsionnelles Infinies *RII*). Or l'effet de la troncature temporelle peut être dramatique, et tout ingénieur versé dans le traitement du signal sait que c'est une très mauvaise idée que de synthétiser un filtre *RIF* à partir de la troncature d'un filtre *RII*. Pour rendre négligeable l'effet de la troncature, l'*IST* se restreint à des impulsions très sélectives et très longues ou alors très énergétiques, deux conditions irréalistes en imagerie clinique.

Fermons cette parenthèse et répondons à la question suivante : les deux conditions précitées sont nécessaires, mais sont-elles suffisantes ? C'est à dire étant donné deux polynômes d'ordre n de la variable Z^{-1}, $A_n$et B_n, et vérifiant en tout ω la contrainte de norme (126), peut-on trouver une suite d'impulsions dures qui 'génère' ces deux polynômes ? Par 'générer' on entend induire en toute fréquence de résonance ω une rotation dont le spineur représentatif est composé de $\alpha_n = Z^{n/2}A_n(Z)$, $\beta_n = Z^{n/2}B_n(Z)$ avec les $A_n(Z)$ et $B_n(Z)$ donnés. La réponse à la question est oui.

1.3.2. *Détermination de la dernière impulsion (d'indice n).* D'après le paragraphe précédent et ses équations (113) (où on fait $i = n$), on trouve que pour que les polynômes a_n et b_n puissent être effectivement synthétisés par un train de longueur $n+1$, on doit avoir

$$a_{n,0} = c_n a_{n-1,0}, \;\; b_{n,0} = s_n a_{n-1,0}. \tag{127}$$

Dans ces équations $a_{n-1,0}$ est inconnu, mais on peut l'éliminer par division membre à membre des deux équations et obtenir

$$t_n = \frac{s_n}{c_n} = \frac{b_{n,0}}{a_{n,0}} \tag{128}$$

où d'après les définitions (98) $t_n = \exp(j\varphi_n)\tan(\theta_n/2)$. Donc, la connaissance du rapport des deux coefficients d'ordre zéro permet de déterminer par sa phase (son argument), la phase φ_n de la dernière impulsion et par son amplitude la tangente de la moitié de la nutation, c'est à dire la nutation elle-même, sans ambiguïté.

Le problème est que nous devons vérifier un deuxième couple d'équations, celui relatif à l'ordre n des deux polynômes, obtenu en faisant $i = n$ dans les équations (114),

$$a_{n,n} = -\bar{s}_n b_{n-1,n-1}, \; b_{n,n} = c_n b_{n-1,n-1}. \tag{129}$$

Là encore il y a une inconnue $b_{n-1,n-1}$, mais qui peut être éliminée par division, pour obtenir, à partir de coefficients connus de $a_n(Z)$ et $b_n(Z)$ une autre valeur de t_n

$$t_n = -\frac{\overline{a}_{n,n}}{\overline{b}_{n,n}}\,. \tag{130}$$

Or il ne peut y avoir deux solutions (128), (130) pour t_n ; la question est donc à quelle condition les deux valeurs obtenues sont égales ? Il faut pour cela que

$$a_{n,0}\bar{a}_{n,n} + b_{n,0}\bar{b}_{n,n} = 0. \tag{131}$$

Mais si nous considérons maintenant la contrainte de normalisation (126) et que nous l'écrivons dans le domaine temporel, c'est à dire en développant le produit des polynômes correspondant pour chacun des deux termes, nous obtenons la somme de deux fonctions d'auto corrélation. C'est une expression un peu lourde. Mais en écrivant uniquement le premier (ordre zéro en Z), le deuxième (ordre 1 en Z) pour donner l'idée, mais surtout le dernier d'ordre n en Z, et aussi en laissant de coté le premier indice (temporel) n des coefficients on a

$$\begin{array}{lll} \bar{a}_0a_0 + \ldots\ldots + \bar{a}_na_n & +\bar{b}_0b_0 + \ldots\ldots + \bar{b}_nb_n & = 1 \\ \bar{a}_0a_1 + \ldots + \bar{a}_{n-1}a_n & +\bar{b}_0b_1 + \ldots + \bar{b}_{n-1}b_n & = 0 \\ \bar{a}_0a_n & +\bar{b}_0b_n & = 0. \end{array} \tag{132}$$

C'est évidemment la dernière de ces équations qui nous intéresse. Elle prouve que, tant que les deux polynômes respectent en tout point du cercle unité dans le plan Z la contrainte de normalisation (126), on peut trouver la dernière impulsion d'un train de $n+1$ impulsions les générant.

1.3.3. *Récursion.* Ecrivant ensuite l'équation (117) pour $i = n$,

$$\begin{bmatrix} A_n & -B_n^R \\ B_n & A_n^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_n & -\bar{s_n} \\ s_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & -B_{n-1}^R \\ B_{n-1} & A_{n-1}^R \end{bmatrix}, \tag{133}$$

où $c_n = 1/\sqrt{1+\mid t_n \mid^2}$ et $s_n = t_nc_n$ sont maintenant connus, et en l'inversant

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & -B_{n-1}^R \\ B_{n-1} & A_{n-1}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n & \bar{s_n} \\ -s_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n & -B_n^R \\ B_n & A_n^R \end{bmatrix}, \tag{134}$$

on peut obtenir les deux polynômes juste après l'impulsion $n-1$

$$\begin{array}{rcl} A_{n-1} & = & c_nA_n + \bar{s}_nB_n \\ B_{n-1} & = & Z(-s_nA_n + c_nB_n). \end{array} \tag{135}$$

On vérifie immédiatement que le terme d'ordre 0 de $(-s_nA_n + c_nB_n)$ est bien 0 en vertu de (128) et que donc après multiplication par Z on obtient une quantité b_{n-1} qui est un

Algorithm 2 L'algorithme SLR inverse réalisé dans le language Matlab (ou Octave). Les polynômes d'ordre, attention, ici $n-1$(chacun défini par n coefficients) sont transmis en entrée dans deux tableaux, on donne en sortie, sans aucun autre traitement, les $c_i = \cos(\theta_i)$ et $s_i = \exp(j\varphi_i)\sin(\theta_i/2)$ correspondant aux n impulsions génératrices. Trouver les angles $\theta_i$et φ_i est ensuite trivial.

```
function [c, s] = inverseSLR(a, b)
n = length(a) ;
c = zeros([1,n]) ;
s = zeros([1,n]) ;
aprev = zeros([1,n]) ;
for i = n :-1 :1
    norm = sqrt( conj(b(1)) * b(1) + conj(a(1)) * a(1)) ;
    cc = a(1) / norm ;    ss = b(1) / norm ;
    aprev = conj(cc) * a + conj(ss) * b ;
    b =    - ss * a + cc * b ;
    a(1 :(i-1)) = aprev(1 :(i-1)) ;
    b(1 :(i-1)) = b(2 :i) ;
    c(i) = cc ; s(i) =ss ;
end
```

polynôme d'ordre $n-1$. De la même façon le coefficient d'ordre n de $c_nA_n + \bar{s}_nB_n$ est nul en vertu de (130), et la quantité A_{n-1}est un polynôme d'ordre $n-1$ en Z^{-1} . Par ailleurs, se plaçant dans le domaine fréquentiel, ou plutôt sur le cercle unité du plan Z et considérant les opérations utilisées lors de l'inversion (134), on s'aperçoit, qu'en tout ω, ce sont des rotations (matrices unitaires) et donc en tout point du cercle unité la norme du spineur est conservée et donc qu'on a de nouveau la contrainte de normalisation vérifiée,

$$|A_{n-1}(Z)|^2 + |B_{n-1}(Z)|^2 = 1. \tag{136}$$

On peut donc recommencer le même raisonnement à l'ordre $n-1$, puis $n-2$,.. et ainsi de suite jusqu'à l'ordre 0.

Et voici donc l'algorithme dit *SLR* qui peut être décrit par sa réalisation dans le langage Matlab à la figure (2). Ces deux dizaines de lignes de code prennent en compte toutes les non linéarités des équations de Bloch. On note que, de la même façon qu'il existe un algorithme direct rétrograde, il existe un algorithme inverse antérograde où c'est la première impulsion qui est déterminée en premier. On peut aussi inventer des algorithmes mixtes où on choisit de déterminer la fin, ou le début, de la séquence d'impulsions non encore déterminées. Ces variations ne présentent pas beaucoup d'intérêt, aussi nous ferons ici l'impasse sur elles.

La non linéarité des équations de Bloch étant prise en compte il ne reste plus qu'à déterminer deux polynômes ou filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) répondant aux deux pré-requis : premièrement un ordre n des filtres égal au nombre d'impulsions dures moins un, deuxièmement une norme du spineur (136) égale à l'unité. Mais il faut évidemment aussi que ces filtres *RIF* correspondent à l'action voulue sur les protons !

Or c'est peut être là, dans la stratégie permettant de passer des objectifs à la définition des deux composantes α,β que le brevet de 1986 [**34**] présente un deuxième volet original qui d'ailleurs a souvent été critiqué par la suite, je pense à tort. Dans cette stratégie on ne tente d'approcher au mieux un spineur arbitraire, ce qui conduirait la plupart du temps à des ondes radio-fréquence irréalisables. On cherche à définir d'abord le spineur $\beta(\omega)$, ou plus exactement son filtre *RIF* d'ordre n associé, $B_n(Z^{-1}) = Z^{-n/2}\beta(Z^{-1})$. Il existe pour cela un algorithme optimal, dans un sens sur lequel nous reviendrons, dit de 'Remez' pour son principe [**63**], et de Parks-McClellan [**64**] pour sa mise en oeuvre informatique. On en déduit ensuite un filtre $A_n(Z^{-1})$ qui vérifie la contrainte de norme (136). Cette dernière opération peut être compliquée dans l'absolu, sauf dans un cas, celui où on cherche la solution dite à phase minimale car correspondant à un algorithme classique du traitement du signal (lié au théorème de Paley-Wiener). Or il se trouve que cette solution est aussi celle qui, toutes choses étant égales par ailleurs, donne une modulation radio-fréquence d'énergie minimale. En soit ceci justifie l'approche proposée, mais on peut aussi la justifier par le fait, qu'à part la conception d'impulsions de bascule, toute l'information utile est dans le β, comme nous allons le voir. Dans le cas d'une bascule la quantité qui est d'intérêt direct est l'aimantation traversale à la fin de l'impulsion $M_{xy} = 2\bar{\alpha}\beta$ et l'une des critiques maintes fois formulées par la suite au sujet de l'algorithme *SLR* est que, l'algorithme ne contrôlant pas parfaitement la phase de α, il ne contrôle pas non plus parfaitement la phase de cette aimantation traversale. Ceci est vrai, mais doit être pondéré par le fait que c'est cette approche qui donne un algorithme simple et rapide. Deuxièmement il se trouve que la phase de la solution choisie α_{min} est quasi linéaire, sauf dans les bandes de transition, où en effet une phase non-linéaire non compensable par un gradient rephaseur est présente. Cependant l'effet de cette phase est gênant uniquement pour des profils très sélectifs qui, dans les faits, ne sont utilisés qu'en acquisition $3D$, là où justement la phase de l'aimantation peut être compensée après acquisition. Il est vrai que dans des cas extrêmes par exemple pour quelques applications récentes de spectroscopie, cette phase est perturbante. Cependant il y a un courant de travaux, suivant en cela un travail précurseur de John Pauly sur les impulsions auto refocalisées, qui cherche à pré compenser la partie non-linéaire de $\alpha_{\min}$, par la phase de β [**65**]. En effet la phase de $\alpha_{\min}$ peut-être assez facilement prédite, et surtout, depuis l'apparition d'un algorithme optimal de conception de filtre *RIF* à valeurs complexes [**66**], un filtre β à phase maîtrisée peut la compenser. En résumé, l'algorithme original était capable de générer de façon optimale la plupart des cas d'importance pratique, mais les quelques applications plus difficiles peuvent être envisagées après quelques adaptations.

1.3.4. *Quelques points secondaires sur SLR proprement dit.* L'algorithme décrit en figure (2) est une implémentation dans le domaine temporel et une simple traduction des équations (135). Quant à l'algorithme de récursion directe des équations (108), il peut s'écrire d'une façon très similaire en temporel, nous ne le présentons pas pour des questions de place.

On préférera cependant, dans le cas de la récursion directe, effectuer la simulation des équations (107) dans l'espace fréquentiel sur le cercle unité du plan Z, pour un nombre

suffisamment grand K de valeurs $Z_k = 2 * \pi k/K$ avec $K > 2n$. Cela permet en effet de calculer tout au long de la radiofréquence l'évolution des paramètres de Cayley-Klein (42). En fréquentiel ceci correspond à de simples multiplications (au total de l'ordre de K multiplications scalaires à chaque pas temporel), alors qu'en temporel ceci correspondrait à des convolutions ou des corrélations de polynômes (K^2 multiplications). On peut également effectuer l'algorithme d'inversion en fréquentiel, avec au moins $K > n$; on obtient les $a_{n,0}$ et $b_{n,0}$ par simple sommation sur le cercle unité. Cependant l'intérêt comparé à l'algorithme temporel (2) n'est alors pas évident.

2. Construction des polynômes.

2.1. Justification de β comme quantité maîtresse de la conception. Nous nous référons à l'équation de la matrice densité sous la forme explicite introduite en (41), reproduite à nouveau ci-dessous pour plus de confort.

$$\begin{aligned} X^+ &= -\beta^2 \bar{X} + \bar{\alpha}^2 X + 2\bar{\alpha}\beta z \\ z^+ &= \beta\alpha\bar{X} + \bar{\beta}\bar{\alpha}X + (\bar{\alpha}\alpha - \bar{\beta}\beta) z. \end{aligned} \tag{137}$$

Il est aussi utile de rappeler ici la remarque de la section (2.5.1) disant que la rotation représentée par un spineur α, β peut toujours être mise sous la forme de deux précessions entourant une nutation pure, qu'on peut toujours supposer être le long de l'axe y (on rappelle que β réel correspond à une impulsion le long de l'axe y),

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta) = \mathcal{R}_z(\angle\beta - \angle\alpha)\mathcal{R}_y(\Theta)\mathcal{R}_z(-\angle\beta - \angle\alpha) \tag{138}$$

avec une nutation centrale Θ

$$\Theta(\omega) = 2 \arcsin |\beta(\omega)|. \tag{139}$$

La nutation centrale $\Theta(\omega)$ locale à la pulsation de résonance ω, n'a certes pas beaucoup de signification physique mais c'est une notation pratique qui permet de tenir compte facilement de la contrainte de normalisation du spineur

$$\begin{aligned} |\alpha(\omega)| &= \cos(\Theta(\omega)/2) \\ |\beta(\omega)| &= \sin(\Theta(\omega)/2). \end{aligned} \tag{140}$$

A partir de ces équations et de cette représentation, tentons d'expliquer le tableau (1) montrant que dans la plupart des cas la composante β est la quantité primordiale de la synthèse d'impulsions sélectives, la quantité α pouvant en être déduite d'une manière certes encore à déterminer. Prenons les cas classiques d'impulsions sélectives telles qu'utilisées en *IRM*. Le cas le plus simple étant les impulsions de saturation et d'inversion, par lequel nous commençons donc.

2.1.1. *Impulsion de saturation ou d'inversion.* Dans ces deux cas on part d'une aimantation le long de l'axe $\vec{z}$, c'est à dire qu'on suppose l'aimantation traversale initialement nulle $X = 0$, et on peut donc toujours supposer dans (137) $z = 1$; par ailleurs la quantité d'intérêt après l'impulsion est l'aimantation longitudinale z^+. On désire annuler celle-ci, $z^+ = 0$ dans le cas de la saturation, ou l'inverser $z^+ = -1$, dans le cas de l'inversion. Toute aimantation concomitante dans le plan traversal X^+ n'a pas d'intérêt direct et on doit pouvoir atténuer son influence par un gradient de déphasage bien choisi. Le transfert principal à opérer par l'impulsion est donc le passage de $(X,z) = (0,1)$ à une valeur z^+ déterminée. En se rapportant à (137), on trouve que ce transfert de X vers z^+ est $|\alpha|^2 - |\beta|^2$ ou encore, en tenant compte de la normalisation, $1 - 2|\beta|^2$. Ceci ne veut pas dire que l'autre transfert, en l'occurrence ici le transfert de $(X,z) = (0,1)$ vers X^+, qu'on trouve égal à $2\alpha\bar{\beta}$, ne soit pas intéressant à étudier, mais cela seulement dans un deuxième temps. Dans l'immédiat, on trouve que le profil utile $1 - 2\bar{\beta}\beta$ ne dépend que de β et même mieux ne dépend que de son module $|\beta|$, sa phase pouvant être quelconque.

2.1.2. *Impulsion de refocalisation.* Le transfert utile d'une impulsion de refocalisation est celui qui, partant d'une aimantation traversale X la transforme en son complexe conjugué. Se reportant à l'équation de la matrice densité (137) on trouve que ce transfert est $-\beta^2$. Pour prévenir tout questionnement, le signe moins provient du fait que si β est réel il correspond à une impulsion le long de l'axe $\vec{y}$, et que l'aimantation X est elle comptée comme réelle si elle est le long de l'axe $\vec{x}$; ainsi, idéalement l'impulsion est à 180° et le long de $\vec{y}$, et alors $\beta = 1$ et le transfert est $X^+ = -\bar{X}$; a contrario une impulsion de 180° le long de l'axe $\vec{x}$ correspond à $\beta = -j$ et transforme X en $\bar{X}$. Si la rotation se fait autour d'un axe décalé de φ au delà de l'axe $\vec{x}$, on a $\beta = -j\exp(j\varphi)$ et le transfert est $X^+ = \exp(2j\varphi)\bar{X}$. On retrouve bien, en passant, que l'axe de la rotation est la bissectrice entre la position de départ de l'aimantation X et sa position d'arrivée X^+. Cette remarque est d'ailleurs importante et impose que la phase de β soit constante dans la coupe (à moins de conditions de préparation spéciales). On doit en effet considérer qu'à l'intérieur de la coupe, la phase de l'aimantation X est non maîtrisée et provient uniquement d'une phase accumulée par un décalage de champ central dB_0 (ou son équivalent en terme de gradients de champ variables) et qu'on veut déclencher un écho par application de la même perturbation après l'impulsion. On doit donc, si l'on veut que toutes les sous-tranches de la coupe génèrent leur écho en même temps et le long du même axe, imposer que la composante $j\beta$ de l'axe de la rotation dans xy soit fixe dans toute la bande passante. Donc la phase $\angle\beta$ de β est fixée, et on ne peut faire varier que son amplitude ou l'angle de nutation Θ.

Cependant, on peut difficilement passer sous silence les transferts parasites dans le cas d'une refocalisation. Supposant même que l'aimantation soit entièrement contenue dans le plan xy au départ (et donc $z = 0$). On a alors deux transferts possibles vers le plan xy :

$$X^+ = -\beta^2\bar{X} + \bar{\alpha}^2 X. \tag{141}$$

Type	Bascule	Saturation	Inversion	Refocalisation SE
Quantit Utile V	$V = M_{xy} = 2\bar{\alpha}\beta$	$V = M_z = 1 - 2\bar{\beta}\beta$		V=-β^2
Bande Passante V_1	$M_y = \sin\Theta_1$	$M_z = 0$	$M_z = -1$	1
Bande Affaiblie V_2	$M_y = 0$	$M_z = 1$	$M_z = 1$	0
Bande Passante β_1	$e^{j\varphi_\beta}\sin\frac{\Theta_1}{2}$, $\varphi_\beta \simeq k\omega$	$\lvert\beta\rvert = 1/\sqrt{2}$ φ_β libre	$\lvert\beta\rvert = 1$ φ_β libre	$\lvert\beta\rvert = 1$ $\varphi_\beta = 0$
Bande Affaiblie β_2	0	0	0	0
Hypothse sur α	$\angle\alpha \simeq k\omega$	–	–	$\bar{\alpha}^2$ dphas

TAB. 1. Ce tableau tente de démontrer que pour la plupart des types d'impulsions, la phase du polynôme α n'intervient pas, et que le module de α étant fixé par le module de β par la contrainte de normalisation (8), $|\alpha| = \sqrt{1-|\beta|^2}$, c'est uniquement le polynôme β avec ou sans sa phase qui est important. Ceci est apparent pour les impulsions de saturation ou d'inversion, deuxième et troisième colonnes, pour lesquelles la quantité d'intérêt V est l'aimantation longitudinale qu'on peut lier directement à $|\beta|$. C'est aussi le cas, dernière colonne, pour les impulsions de refocalisation si on fait l'hypothèse que l'influence des signaux parasites qui dépendent de α est atténuée par les gradients d'écrasage (dernière ligne, dernière colonne). Bien sûr, dans le cas des impulsions de refocalisation, la phase de β intervient. Dans le cas des impulsions de bascule, la composante α et en particulier sa phase, intervient dans l'expression de la quantité d'intérêt V qui est l'aimantation traversale M_{xy} à la fin de l'impulsion. Cependant si on admet de pouvoir rephaser l'aimantation par un gradient de champ, il suffirait, pour pouvoir baser la conception sur la détermination préalable de β, que la phase de α soit pratiquement linéaire. Or ceci est approximativement le cas de la solution $\alpha_{\min}$ à phase minimum. Dans le tableau et dans le texte l'indice 1 se réfère à des valeurs en bande passante, l'indice 2 aux valeurs en bande affaiblie.

Le terme $\bar{\alpha}^2 X$ correspond à la partie de l'aimantation qui n'est pas affectée par l'impulsion et qui donc continuera à se déphaser naturellement sous l'influence des perturbations futures. Le problème est que cette partie peut ne pas se déphaser assez rapidement et créer du signal pendant la période de lecture qui souvent démarre juste après l'impulsion. C'est le rôle des gradients d'écrasage positionnés de part et d'autre de l'impulsion de refocalisation (voir figure (3)) d'augmenter la phase de α sans toucher à la phase de β. Si le nombre de tours de phase de $\bar{\alpha}^2$ est suffisamment grand dans un élément de volume d'image (voxel), le signal émis par ce voxel correspondant à ce terme sera négligeable. Pour fixer les idées on

cherche généralement à avoir de l'ordre de un tour et demi, voire deux tours complets dans un voxel. (Par ailleurs ces gradients écraseurs ont également une influence bénéfique sur le deuxième type de signal parasite qui provient d'une éventuelle composante z présente avant l'impulsion et dont le transfert vers le plan xy est $2\bar{\alpha}\beta$).

2.1.3. *Refocalisation CPMG.* Pour des raisons de place dans le tableau (1) nous n'avons pas mentionné le cas des impulsions de refocalisation répétées régulièrement qui génèrent un train d'échos selon la méthode Carr-Purcell-Meiboom-Gill (*CPMG).* L'étude en sera faite abondamment dans un chapitre suivant. On trouvera qu'après une période de stabilisation, le signal recueilli est proportionnel *directement* à β.

Donc il semble que pour les impulsions d'utilisation courante et à part les impulsions de bascule, le polynôme α n'intervient pas directement dans le profil désiré. Il est intéressant de répondre à la question qui se pose alors, comment choisir α ? Sur quel critère ? Il sera par la suite loisible de revenir sur le cas de l'impulsion de bascule, avec tout ce que nous aurons appris du choix de α. D'abord et pour un premier essai trouvons un β de façon simple.

2.1.4. *Conception en quelques lignes de code.* En effet, de façon à obtenir dans tous les cas la solution optimale, nous serons amenés par la suite à utiliser le programme de conception de filtres *RIF* de Parks-McClellan [**64**] très utilisé en télécommunications. C'est un assez gros programme, écrit en Fortran de la belle époque (avec des 'goto' imbriqués) et que cependant nous devrons légèrement adapter pour la conception d'impulsions douces. Cet algorithme représente la partie la plus impressionnante et même rédhibitoire pour quiconque désire utiliser l'algorithme *SLR* . Il est cependant un ou deux cas où on peut se passer de ce programme et tout en restant proche de l'optimalité. C'est le cas de l'impulsion de refocalisation *CPMG* que nous venons d'introduire et qui nécessite la conception directe du polynôme $B_n = Z^{-n/2}\beta$. Dans ce cas on peut obtenir le filtre (ou polynôme en Z^{-1}) par simple fenêtrage. On se reportera pour une revue de ces techniques aux ouvrages de traitement du signal discret [**52**]. Cependant on peut dire ici que le fenêtrage ou apodisation, d'ailleurs utilisé en optique, consiste à multiplier la transformée de Fourier inverse (52) d'un filtre passe-bas idéal ($\beta(\omega)$=1 ,$|\omega| < \omega_c$, $\beta(\omega) = 0$ ailleurs) c'est à dire $\sin(\omega_c\tau)/(\omega_c\tau)$ par une fenêtre $w(\tau)$ avec $\tau = kT$ et $-n/2 < k < n/2$. Cette fenêtre permet d'adoucir dans le domaine fréquentiel les rebonds (ripples) apparaissant autour de la transition et dus à la limitation du support dans le domaine temporel. On préférera utiliser en lieu et place du sempiternel *Hanning* ou *Hamming* une fenêtre de *Kaiser-Bessel* [**67**] , $wkb(\tau')$ qui grâce à un paramètre de réglage, malheureusement pour nous, dénommé dans la littérature correspondante, β ,

$$wkb(\tau') = I_0(\beta\sqrt{1-\tau'^2})/I_0(\beta), \tag{142}$$

permet de réaliser un compromis entre la largeur de la bande de transition et l'amplitude des rebonds . Dans la formule précédente τ' est le temps τ centré et dilaté de façon à varier de -1 à 1 dans le support temporel de longeur D ; les valeurs usuelles de β vont de 2 à 5, sachant que $\beta = 0$ redonne la fenêtre carrée ; I_0 est la function de Bessel modifiée d'ordre

zéro. L'amplitude des rebonds obtenus est très proche du minimum possible atteint avec le programme Parks-McClellan. La synthèse de filtre *RIF* par fenêtre de *Kaiser-Bessel* qui s'écrit en quelques lignes de code, semble donc équivalente à la méthode lourde et optimale ; cependant elle ne peut répondre qu'à des gabarits de réponses fréquentielles où les rebonds en bande passante δ_1 et en bande affaiblie δ_2 sont d'égales amplitudes. Cela restreint en toute rigueur ce type de calcul de filtre *RIF* à l'impulsion de refocalisation *CPMG*, ou à l'impulsion de bascule à petits angles. Supposons avoir trouvé le filtre β répondant à nos attentes en termes de rebonds, de bande passante et de bande de transition. Il faut de plus veiller à avoir en tout point du cercle unité, $|\beta(\omega)| < 1$ et, si nécessaire, on applique donc un léger facteur de contraction. β étant maintenant fixé, nous n'avons aucun désir particulier concernant le filtre α, à part bien sûr le fait de pouvoir le génèrer sous forme d'un train d'impulsions. Aussi α doit-il être une série de Laurent d'ordre $-n/2$ à $n/2$ en Z^{-1}. Autrement dit son décalé temporel, $A_n(Z^{-1}) = Z^{-n/2}\alpha$, doit être un polynôme d'ordre n. Par ailleurs, la condition de normalisation des spineurs (126) doit être vérifiée en chaque point du cercle unité dans le plan Z. En d'autres termes, le module de $A_n(\omega)$ est fixé par

$$|A_n|^2 = 1 - |B_n(\omega)|^2, \tag{143}$$

et il ne nous reste plus qu'à trouver sa phase. Ceci est un problème classique de traitement du signal, la factorisation de spectre, mais aussi un problème de commande optimale des systèmes linéaires stationnaires quand l'horizon est infini et que le critère est quadratique.

2.2. Filtres à déphasage minimum. On trouvera toutes les indications nécessaires à la compréhension de cette partie dans la référence [**52**] et certains autres développement dans [**51**], livres heureusement toujours réédités. Cependant il semble que la connaissance des filtres à déphasage minimum s'évanouisse car feuilletant divers ouvrages récents enseignant le traitement du signal je n'y ai pas trouvé mention de cette importante notion. Aussi je me permet de rappeler dans l'appendice général les grandes lignes du sujet, ne gardant dans le corps du présent texte que ce qui est directement utile à *SLR*.

Trouver la phase d'un filtre *RIF* de longueur $n+1$ dont on connaît le module requiert la recherche des $2n$ zéros du polynôme représentant le carré de son module. Ces zéros viennent par paire, z_i et $1/\bar{z}_i$ (où on suppose $|z_i| < 1$), qui sont symétriques par rapport au cercle unité. Pour chacune de ces paires on doit choisir l'un des zéros. En effet le monôme $(1 - z_i Z^{-1})$ et le monôme $(Z^{-1} - \bar{z}_i)$ sont des fonctions causales (pas de termes en Z) et ont la même norme sur le cercle unité $|Z| = 1$ et sont donc tous deux solutions. Une fois ces n choix dichotomiques réalisés, la multiplication des n monomes retenus donne le polynôme représentant un filtre *RIF* dont le carré du module sur le cercle unité est celui imposé. La construction d'une solution au problème de factorisation est donc une opération assez complexe et surtout elle ne donne pas une solution particulière mais nous laisse en face de 2^n solutions possibles, correspondant aux n choix binaires présents dans la procédure. Le filtre à déphasage minimale est la solution qui correspond à prendre tous les zéros à l'intérieur du

cercle unité. Cette solution a plusieurs propriétés (voir appendice), la plus immédiate étant que parmi toutes les solutions, elle est la seule à donner un filtre *RIF* qui a un inverse causal et c'est évidemment cette propriété qui rend cette solution utile en commande optimale. Mais ce sont deux autres propriétés qui vont nous intéresser ici :

2.2.1. *Le filtre à déphasage minimum a le coefficient d'ordre 0 maximum.* Parmi les 2^n filtres ayant le même spectre $|A_n(Z)|^2 = A(Z)\bar{A}(Z^{-1})$ sur le cercle unité, celui à déphasage minimum a un terme d'ordre zéro $a_{n,0}$ dont le module est le plus grand. Comme on peut toujours multiplier une solution par un facteur de phase global, on peut toujours rendre $a_{0,n}$ réel et donc le filtre à déphasage minimum est celui dont le terme d'ordre zéro, rendu réel, est le plus grand. Ceci est assez rapidement réalisé en comparant le terme d'ordre zéro de $(1 - z_i Z^{-1})$ au terme d'ordre zéro de $\bar{z}_i - Z^{-1}$ ou de (on veut que le terme d'ordre zéro reste réel) $|z_i|(1 - Z^{-1}/\bar{z}_i)$. Tout choix autre que celui à déphasage minimum réduit donc le module du terme d'ordre zéro du polynôme A_n par le produit $\prod |z_i|$ de l'inverse des modules des zéros choisis à l'extérieur du cercle unité.

Cette propriété est d'ailleurs le cas particulier d'une propriété plus générale qui dit que le filtre à déphasage minimum a les coefficients d'énergie maximum entre le temps $\tau = 0$ et n'importe quel temps $\tau = \tau_c < nT$ fixé a priori. Autrement dit l'énergie du signal est la plus concentrée vers le début du signal. Voir la référence [**51**] à ce sujet. Partant du filtre à déphasage minimum, l'échange d'une collection de zéros à l'intérieur du cercle unité $\{z_i\}$ en zéros à l'extérieur du cercle unité $\{1/\bar{z}_i\}$ donnera un coefficient d'ordre 0 (ici exprimé par son logarithme) réduit

$$\ln(a_{0,n}) = \ln(a_{0,n,\min}) + \sum_i \ln(|z_i|). \tag{144}$$

Par ailleurs le terme d'ordre zéro du filtre à déphasage minimum peut être obtenu facilement à partir du spectre fréquentiel par intégration de son logarithme, comme ceci est montré dans l'appendice.

$$\ln(a_{0,n,\min}) = \frac{1}{2\pi} \oint \ln(|A_n(\varphi)|) \mathrm{d}\varphi; \quad \varphi = \omega T. \tag{145}$$

Ces deux équations pourront être utilisés pour estimer l'énergie des impulsions douces générées par *SLR*.

2.2.2. *Le filtre à déphasage minimum est obtenu sans recherche de zéro.* Si on reprend mot à mot ce qui est dit dans la publication [**33**] , la phase du filtre à déphasage minimum peut être obtenue par

$$\varphi_{\min}(\omega) = \mathcal{H}(\log(|A_n(\omega)|), \tag{146}$$

où $\mathcal{H}$ est la transformée de Hilbert. En fait cette formule un peu impressionnante est, de la même façon que (145), assez simple à trouver en passant au logarithme de $A_n(Z^{-1})$. Une fois encore, ceci est développé dans l'appendice. Cependant la mise en oeuvre pratique de cette formule est immédiate lorsqu'on sait que la transformée de *Hilbert* revient ici à

Algorithm 3 L'obtention du facteur de phase minimum d'une fonction de transfert, dont on connait uniquement le module au carré 'rho' en fréquence, est assez facile à calculer comme le démontre cette fonction Octave. C'est la mise en pratique de l'équation (146). Après l'appel de cette fonction on obtiendra la solution à phase minimum par $A_{\min} = phasefact \times \sqrt{\rho}$

```
function phasefact = ro2minphfact(ro)
nfft = length(ro) ;
lro = 0.5 * log(ro) ;
% transformée inverse ; par convention le temps tau=0 correspond à l'index nfft/2+1
lro = ifft(lro) ; lro = fftshift(lro) ;
lro(1 :nfft/2) = -lro(1 :nfft/2) ;
lro(nfft/2+1) = 0 ;
% retour dans le domaine fréquentiel
lro = fftshift(lro) ; lro=fft(lro) ;
phasefact = imag(lro) ;
phasefact = exp(j * phasefact) ;
```

prendre la transformée de Fourier inverse, à multiplier par la fonction signe (qui a comme valeur -1 pour $\tau < 0$, $+1$ pour $\tau > 0$ et la valeur 0 en $\tau = 0$) , puis à prendre la transformée de Fourier directe. Pour être tout à fait concret l'encadré (3) montre la partie de code Matlab effectuant cette opération.

2.2.3. *Solution à énergie minimum.* Le filtre à déphasage minimum est donc assez simple à obtenir à partir du spectre $|A_n(\omega)|^2$ mais de plus il a dans notre cas une propriété physique : c'est parmi tous les filtres $A_n(Z)$ possibles celui qui va donner, après inversion par *SLR,* une impulsion sélective d'énergie minimale ! Ceci repose sur la propriété exposée ci-dessus : $a_{0,n}$ est maximum lorsque le filtre A_n est à déphasage minimum. Il faut maintenant simplement combiner ce résultat à l'expression de $a_{0,n}$ qui est une fonction des angles de nutation, selon l'équation (115). Cette expression dit que $a_{0,n}$ est le produit des cosinus des demi angles, et donc en prenant le logarithme de ce produit, elle s'écrit de façon équivalente

$$\log a_{n,0} = \sum_{i=0}^{n} \log(\cos(\frac{\theta_i}{2})). \tag{147}$$

Cette fonction est une fonction décroissante et convexe des θ_i et pourrait être utilisée telle quelle comme mesure de 'l'énergie' du champ radio fréquence. On peut cependant la rendre plus physique dans le cas où on peut admettre que chacun des θ_i est suffisamment petit pour que

$$\cos(\frac{\theta_i}{2}) \approx 1 - \frac{1}{2}(\frac{\theta}{2})^2. \tag{148}$$

En développant alors les logarithmes du membre de droite de (147), au premier ordre, puis en inversant le logarithme on trouve

$$a_{n,0} \approx e^{-\Sigma\theta_i^2/8}. \tag{149}$$

On peut ainsi relier $a_{0,n}$ à la somme des carrés des nutations. Ou en prenant le logarithme népérien et liant avec l'expression du logarithme de $a_{0,n}$ trouvée en (145)(144)

$$\sum_{i=0}^{n}\theta_i^2 = -8(\frac{1}{2\pi}\oint \ln(|A_n(\varphi)|)\mathrm{d}\varphi + \sum_i \ln(|z_i|)). \tag{150}$$

Ceci constitue la justification élémentaire du choix du filtre A_n minimum phase comme donnant l'impulsion d'énergie minimum. C'est d'ailleurs la seule justification présentée et dans le brevet original [**34**] et dans l'article de référence [**33**]. Il faut admettre que pour toute utilisation pratique ceci suffit, mais en toute rigueur il faut remarquer que (150) ne fait que lier $\ln a_{0,n}$ à la *somme des carrés des nutations* d'un train d'impulsions dures ! Il faudrait pouvoir le lier à l'énergie de l'impulsion continue et physiquement réalisée. Quelques articles plus récents et utilisant l'*IST* ont donné des expressions de l'énergie d'une radiofréquence sélective continue [**60, 68**] ; comme tout ce qui concerne l'*IST*, la démonstration est ardue ou parfois laissée à des publications de niveau mathématique inatteignable pour le reste d'entre nous. Je montre dans le paragraphe suivant que le passage au continu à partir de *SLR* par des arguments élémentaires donne le même résultat. Il va sans dire que ce paragraphe peut être réservé pour une seconde lecture.

2.2.4. *L'énergie d'une impulsion continue.* On a vu que dans le cas d'une modélisation d'une onde continue, de support fini D, d'amplitude maximum borné, on peut réduire à volonté les θ_i en augmentant suffisamment le nombre n de segments (ou ici l'ordre des polynômes). L'intervalle élémentaire $T = D/n$ tendant vers zéro, le train d'impulsions devient de plus en plus équivalent à la fonction en escalier obtenue par blocage d'ordre 0 qui elle même tend vers une fonction continue $\omega_1(t) = \gamma b_1(t)$. Aussi remplaçons θ_i par $\gamma b_1(iT)T$, et donc θ_i^2 par $\gamma^2|b_1(iT)|^2T^2$, mais aussi, allant plus loin, remplaçons la valeur échantillonnée $|b_1(iT)|^2$ par la valeur moyenne sur un intervalle de la fonction continue correspondante

$$|b_1(iT)|^2 \simeq \frac{1}{T}\int_{iT-T/2}^{iT+T/2}|b_1(t)|^2\mathrm{d}t. \tag{151}$$

On obtient ainsi la limite vers laquelle la somme des carrés tend

$$\sum_{i=0}^{n}\theta_i^2 \to T\times\int_0^D \gamma^2|b_1(t)|^2\mathrm{d}t. \tag{152}$$

où apparaît l'énergie

$$E = \int_0^D |b_1(t)|^2\mathrm{d}t \tag{153}$$

de l'impulsion sélective, exprimée en pratique en Gauss$^2\times$ms, ou en toute rigueur en teslas$^2\times$s. On peut donc, lorsqu'on fait tendre T vers zéro, écrire

$$a_{n,0} \simeq e^{-\gamma^2 E \times T/8} \tag{154}$$

ou en inversant cette relation

$$E = -8 \ln a_{n,0}/(\gamma^2 T) \tag{155}$$

justifiant ainsi le choix du signal $A_{\min}$ qui donnera l'impulsion RF ayant la plus faible énergie, même lorsque T est fini. Or l'énergie de l'impulsion est un paramètre important qui, à partir de modèles d'absorption permet d'estimer assez précisément l'énergie spécifique déposée sur le patient, cette fois-ci exprimée en Watt. La limitation de cette énergie absorbée à 1Watt/kg (ou, localement à 4 Watt/kg au plus) est l'un des facteurs limitant la vitesse d'acquisition des données en *IRM* (l'autre étant la stimulation nerveuse périphérique qui limite la vitesse de commutation des gradients de champ central). L'énergie minimum, toute chose étant égale par ailleurs, est donc un critère de choix fondamental dans cette discipline. De fait la valeur en Gauss$^2 \times$ ms est l'un des paramètres qui est demandé après une conception d'impulsion RF. Inutile de dire que cette valeur n'est pas calculée numériquement à partir de $a_{0,n}$, selon la formule (155), mais très prosaïquement à partir de la séquence des θ_i obtenus par l'algorithme *SLR*,

$$E_{\text{approx}} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n} \theta_i^2/\gamma^2. \tag{156}$$

On note en effet que lorsqu'on on fait tendre n vers l'infini à durée total D donnée, c'est à dire quand on se rapproche d'une onde continue et que T tend vers zéro, le coefficient $a_{0,n}$ tend vers 1 et est numériquement mal déterminé. Pour obtenir la valeur de E sans passer par l'inversion *SLR* il faut rester dans le domaine fréquentiel et utiliser l'expression que nous avons obtenue pour le logarithme de $a_{0,n}$ (145) ou (144) et la porter dans (155). Considérons d'abord le cas le plus simple de l'énergie minimum, c'est à dire du choix du filtre minimum phase. Portant (145) dans (155), on obtient dans un premier temps, grâce à $\varphi = \omega T$, la disparition du facteur T

$$\gamma^2 E_{\min} = \int_0^D \gamma^2 |B_1(t)|^2 \mathrm{d}t = -8 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \log(|A(\omega)|) \mathrm{d}\omega, \tag{157}$$

et enfin en faisant tendre les bornes d'intégration π/T vers l'infini, on obtient des expressions d'où toute référence au processus d'échantillonnage a disparu.

$$\gamma^2 E_{\min} = -8 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log(|A(\omega)|) \mathrm{d}\omega = -\frac{8}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log(\cos \Theta(\omega)/2) d\omega. \tag{158}$$

On a simplement dans la dernière expression remplacé $|A(\omega)|$ par son exprerssion en fonction de la nutation centrale comme dans (140).

Dans le cas d'un filtre B passe bas on peut, en confondant le résultat de l'optimisation avec la spécification, $\cos(\Theta(\omega)/2) = \cos(\Theta_1/2)$ dans la bande passante de $-\omega_p$à ω_p, en

simplifiant également la bande affaiblie, $\cos(\Theta(\omega)/2) = 1$ et en négligeant quelque peu l'influence de la bande de transition, écrire (158) sous forme très simplifiée

$$\gamma^2 E_{\min} = -\frac{8}{\pi}\log(\cos\Theta_1/2)\omega_p. \tag{159}$$

A faible niveau de nutation on retrouve bien l'équivalence de l'écriture de l'énergie dans le domaine fréquentiel et temporel.

$$\gamma^2 E_{\min} \simeq 2F_p\Theta_1^2 \tag{160}$$

si F_p est la demi bande passante, en hertz, du filtre B. L' expression plus générale (159) montre assez bien que l'énergie croit beaucoup plus rapidement quand Θ_1 augmente, particulièrement au dessus de 90°, et diverge rapidement lorsque l'angle approche 180°. Cependant cette expression simplifiée, introduite par Charles Epstein dans le cadre de l'*IST* [**60**], est d'application difficile dans le cas des filtres *RIF* optimaux que nous utiliserons. En effet, pour les filtres *RIF* dont la nutation en bande passante approche les 180°, les ondulations du filtre optimal font qu'on ne peut pas confondre la spécification Θ_1 et les maxima locaux de $\Theta(\omega)$. Par contre cette expression est sans doute applicable aux filtres de type Butterworth [**69**], souvent utilisés par l' *IST*, qui ont des réponses très plates, mais très sous-optimales en bande passante.

Généralisons maintenant au cas non minimum. Il est toujours possible, en recherchant les zéros de $A(Z)$ de choisir un, deux ou quelques zéros qui soient à l'extérieur du cercle unité pour ainsi perturber la réponse en phase de $A(Z)$. On effectuera ceci pour des zéros en regard de la bande passante si on veut par exemple perturber de façon utile la phase de l'aimantation traversale $M_{xy} = 2\bar{\alpha}\beta$ à la fin d'une impulsion de bascule. Pour chaque échange de zéro de l'intérieur vers l'extérieur de cercle unité, on sait prédire l'augmentation d'énergie concomitante , car on sait que $a_{0,n}$ est multiplié par le module $|z_i|$ du zéro stable échangé. Utilisant (144) on a

$$\gamma^2 E = \gamma^2 E_{\min} - \frac{8}{T}\sum_i \ln|z_i|. \tag{161}$$

Où le facteur $1/T$ a réapparu. Mais il faut remarquer que lorsqu'on diminue T en gardant la même spécification physique de bande passante et de de bande affaiblie, les angles sur le cercle unité $\varphi = \omega T$ se contractent proportionnellement à T mais aussi les zéros en regard de la bande passante restent en nombre constant et bougent en position angulaire (φ) et également le long du rayon. On pourra toujours écrire

$$z_i = e^{p_i T},\ p_i = j\omega_i + r_i, \tag{162}$$

où p_i, la position du zéro dans le plan de la transformée de Laplace, tend rapidement vers une constante quand T diminue. Et donc $\ln|z_i|/T$ devient rapidement quasi constant et egal à r_i.

Dans ces conditions l'énergie tend rapidement vers une constante quand on diminue T et (161) s'érit d'une manière plus générale

$$\gamma^2 E \to -2(4\sum r_i + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log(|A(\omega)|^2) d\omega)). \tag{163}$$

On a groupé les facteurs de façon à pouvoir comparer ce résultat à d'autres publications. On note que l'équation (163) obtenue ci-dessus par des moyens élémentaires est compatible avec l'équation numéro 50, reproduite dans [**60**], sans démonstration et se référant à de très difficiles publications mathématiques. Le facteur 2 de différence apparente entre les deux résultats provient de la division par deux dans [**60**] de toutes les pulsations (ω et ω_1). L'approche suivie ici est sans doute proche, mais beaucoup plus simple que la démonstration apportée par Rourke [**68**] .

L'augmentation d'énergie lorsqu'on choisit un ou des zéros z_i à l'extérieur du cercle unité est rapidement prohibitive, particulièrement quand on part d'une impulsion à faible angle de nutation car alors les zéros de A_n sont très éloignés du cercle unité. L'article [**70**] a exploré cette technique d'échange de zéros. Notons cependant que le brevet original de 1986 [**34**] présentait déjà un exemple de conception d'impulsion à énergie non minimale par un tel échange de zéros. Cependant, on trouve qu'en plus de l'augmentation de l'énergie totale de l'impulsion RF, l'impulsion résultante devient aussi plus sensible à des variations de gain de la chaîne RF, ceci incluant les défauts d'homogénéité du champ B_1. Aussi, mis à part pour les impulsions auto-refocalisées, il y a, à ce jour, peu d'intérêt à chercher d'autres solutions que celle à énergie minimum.

3. Spécification et Conception Optimale de la composante β.

Nous admettons désormais que la composante α se déduit de β par la contrainte de normalisation. Bien que ce ne soit pas une nécessité imposée par l'algorithme *SLR*, on peut supposer que la bande de fréquence perturbée par l'impulsion sélective est centrée autour de $\omega = 0$ et de support borné ; c'est même dans ce cas seulement qu'en augmentant n on tendra vers une impulsion continue. On supposera donc qu'au delà d'une certaine fréquence de résonance, la perturbation apportée par l'impulsion RF est préférentiellement nulle, c'est la bande affaiblie. On peut aussi supposer que la bande d'intérêt est découpée en bande de fréquences, dites bandes passantes, où est imposé un certain comportement. Ces bandes de fréquence sont séparées par des 'bandes de transition' où le comportement est, dans une certaine mesure, laissé libre. A l'époque de l'invention de *SLR* existait l'algorithme optimal *Remez* et ce depuis pas mal de temps, son implantation informatique selon *Parks-McClellan* étant plus récente [**64, 63**]. Cet algorithme permet de trouver des filtres *RIF* ayant une réponse proche, au sens de la minimisation de l'erreur maximum, de valeurs données dans plusieurs bandes passantes et affaiblies. L'erreur pouvait être pondérée, c'est à dire qu'on pouvait imposer des erreurs plus petites dans certaines bandes que dans d'autres, à l'opposé de ce qu'il est possible de faire en utilisant une conception de filtres par fenêtrage, même quasi-optimal [**67**]. La seule contrainte un peu gênante était que la valeur $\beta(\omega)$ soit réelle

en fréquence et réelle en temps τ, ou de façon équivalente symétrique autour de $\omega = 0$. Les choses ont changé récemment et il existe désormais un algorithme permettant la conception de filtres à phase variable [**66**] et ne répondant à aucune symétrie imposée. Cependant et bien donc que ce ne soit pas une nécessité absolue, il faut bien remarquer qu'à ce jour la principale utilisation de ces algorithmes à l'*IRM* n'a concerné qu'une seule bande passante, a priori symétrique, et nous nous restreindrons à ce cas ici. Ceci étant dit, il nous reste à définir la liaison entre les paramètres que le clinicien cherche à voir respecter et les paramètres d'entrée de ce programme. Commençons par un survol des spécifications d'un filtre *Parks-McClellan*.

3.1. Conception de filtre RIF digitaux par Remez.

3.1.1. *Phase linéaire.* Dans le cas simplifié mais très pratique d'une seule bande passante, et de deux bandes affaiblies elles aussi symétriques, l'algorithme PM trouve un polynôme $h_n(Z)$ causal à coefficients réels et d'ordre n

$$H_n(Z) = \sum_{i=0}^{n} h(i) Z^{-i}. \tag{164}$$

Il impose de plus une symétrie en temps $h(n-i) = h(i)$ ou antisymétrique $h(n-i) = -h(i)$, ce qui impose que le filtre centré

$$h(Z) = Z^{-n/2} H_n(Z) \tag{165}$$

soit de valeur réelle ou imaginaire. Le principe de l'utilisation de *Remez* dans l'algorithle *SLR* est d'identifier H_n avec le polynôme B_n dans $\beta_n = Z^{-n/2} B_n$. Donc on contraint, au moins avec l'algorithme Parks-McClellan, la composante spinorielle $\beta_n(\omega)$ à être réelle symétrique autour de $\omega = 0$. Par ailleurs dans le cas de deux bandes uniquement, une bande passante entourée d'une bande affaiblie, on décide de toujours réaliser un filtre h dont la valeur en bande passante oscille autour de 1. On met ensuite à l'échelle le résultat de façon à obtenir un $\beta(\omega)$ de valeur en bande passante égale à la valeur désirée, que l'on note β_1 ou $\sin(\Theta_1/2)$ avec Θ_1" l'angle de nutation dans la bande passante"(139) . On passera donc de h à β par

$$\beta_n(Z) = \beta_1 h(Z) = \sin(\frac{\Theta_1}{2}) h(Z). \tag{166}$$

Afin de définir le filtre h, les spécifications demandées en entrée du programme Parks-McClellan sont les valeurs de l'extrémité de la bande passante f_p et de la bande affaiblie f_s, ces valeurs s'entendant en unité réduite (rapportée à $1/T$) ainsi que *le rapport* δ_1/δ_2 des ondulations en bande passante (δ_1) ou en bande affaiblie (δ_2) . A partir de ceci l'algorithme va trouver, par une procédure itérative mais cependant très rapide, le filtre RIF d'ordre n, $H_n(Z)$ dont la version centrée h présente les plus petites ondulations δ_1 et δ_2 autour des valeurs nominales β_1 et $\beta_2 = 0$. En fait il est équivalent ici de dire la plus petite ondulation δ_1 ou la plus petite ondulation δ_2, leur rapport étant fixé par la spécification. On pourrait

même dire que dans le cas simplifié de deux bandes, l'algorithme minimise le produit $\delta_1\delta_2$ ou même la moyenne géométrique $\sqrt{\delta_1\delta_2}$ des ondulations. La figure (5) donne un exemple de conception de filtre avec $\delta_1/\delta_2 = 3$. La réponse en fréquence $h(\omega)$ n'a été tracée que dans un intervalle raisonnable de fréquences réduites mais il faut remarquer que l'ondulation en bande passante d'amplitude δ_2 s'étend, de façon pas très physique jusqu'aux fréquences réduites -0.5 et 0.5. Nous reviendrons là-dessus dans un instant car il est bien évident que ceci va nous poser quelques problèmes. En attendant, définissons bande de transition, en unité réduite comme étant

$$f_t = (f_s - f_p), \tag{167}$$

ou aussi, en unité physique, par exemple le Hz si $1/T$ est exprimé en secondes,

$$F_t = (f_s - f_p)/T. \tag{168}$$

On appelle produit 'temps $\times$ bande de transition' le produit DF_t. Et puisque $D = (n+1)T$, c'est aussi le produit $(n+1)f_t$ en unités réduites. Plus ce produit est grand et plus on peut s'attendre à obtenir des ondulations d'amplitudes faibles. Dans le cas de la figure (5) le produit temps $\times$ bande de transition choisi était égal à la limite d'incertitude $DF_t = 1$ (ce que les physiciens quantiques appellent la relation d'incertitude). Ceci explique que les ondulations obtenues soient assez élevées, de l'ordre de 11% et 4% respectivement en bande passante et en bande affaiblie.

On peut estimer par avance les ondulations par une loi simple, approchée, qui est la loi de Kaiser. Elle a été dérivée à partir des résultats de conception par la fenêtre de Kaiser-Bessel (où on a par principe même $\delta_1 = \delta_2 = \delta$) mais généralisée en remplaçant δ par $\sqrt{\delta_1\delta_2}$ et en adaptant expérimentalement les coefficients (voir [**67**]). Elle s'écrit, avec adaptation des notations,

$$D \times F_t = \frac{-20\log_{10}\sqrt{\delta_1\delta_2} - 11.6}{14.6} \tag{169}$$

ou en utilisant des logarithmes népériens

$$D \times F_t = -0.6\ln\sqrt{\delta_1\delta_2} - 0.8 \tag{170}$$

qu'on peut aussi inverser, et mettre sous forme exponentielle

$$\sqrt{\delta_1\delta_2} = 0.264\, e^{-(D\times F_t)/0.6} \tag{171}$$

Une expression un peu plus compliquée, due à Herman est utilisée dans l'article [**33**]. Elle fait intervenir des termes dépendant séparément de $\delta_1$et δ_2, mais l'équation de type (169) est suffisante dans la mesure ou on réalise [**71**] que la valeur de la bande passante f_p influe avec des variations relatives de près 30%, sur les valeurs des ondulations δ_1, δ_2. Il

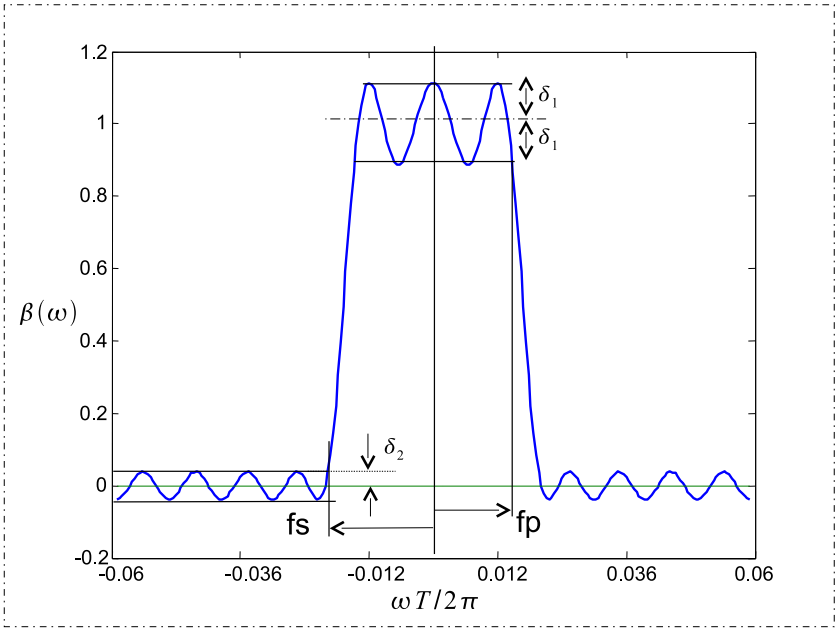

FIG. 5. Exemple de spécifications et résultat $h(\omega)$ obtenu par l'algorithme Parks- McClellan. Le rapport des ondulations δ_1/δ_2 spécifié était de 3, les limites de bandes f_p et f_s exprimées en unité $1/T$ étaient de 0.015 et 0.020 et le nombre d'échantillons de 201 ($n = 200$), soit un produit temps $\times$ bande de transition très faible égal à 1, qui explique les ondulations résiduelles assez élevées, un peu plus de 11% pour δ_1(le tiers de ceci pour δ_2).

$r = \delta_1/\delta_2$	$DF_t = 1, r = 3$	$DF_t = 2, r = 0.1$	$DF_t = 2, r = 1$	$DF_t = 2, r = 10$
$\sqrt{\delta_1\delta_2}$ nominal	0.05	0.0094	0.0094	0.0094
$\sqrt{\delta_1\delta_2}$ observé	0.063	0.0075	0.0110	0.010
Erreeur relative	26%	-20%	17%	6%

TAB. 2. Ce tableau compare la valeur moyenne géométrique des ondulations observées sur les figures (5)(6) et la prédiction de cette moyenne par la formule (171). D'après cette formule la moyenne géométrique des ondulations ne devrait pas dépendre du rapport $r = \delta_1/\delta_2$ imposée entre ces ondulations, seulement du produit temps $\times$bande de transition, et en particulier elle devrait être constante dans les trois dernières colonnes. On voit qu'en fait cette formule ne donne qu'un ordre de grandeur des ondulations. Cependant il faut se rappeler que cette erreur de parfois 30% concerne l'erreur sur une 'erreur'.

est donc illusoire de vouloir être trop précis, et mieux vaut garder la simplicité conceptuelle de (171) qu'on peut exprimer en français par " la moyenne géométrique des ondulations décroît exponentiellement en fonction du produit temps $\times$bande de transition".

Pour illustrer ceci la figure (6) représente trois conceptions de filtre $h(\omega)$ avec un produit temps $\times$ bande de transition constant mais cette fois ci égal à 2 : on a gardé par rapport au

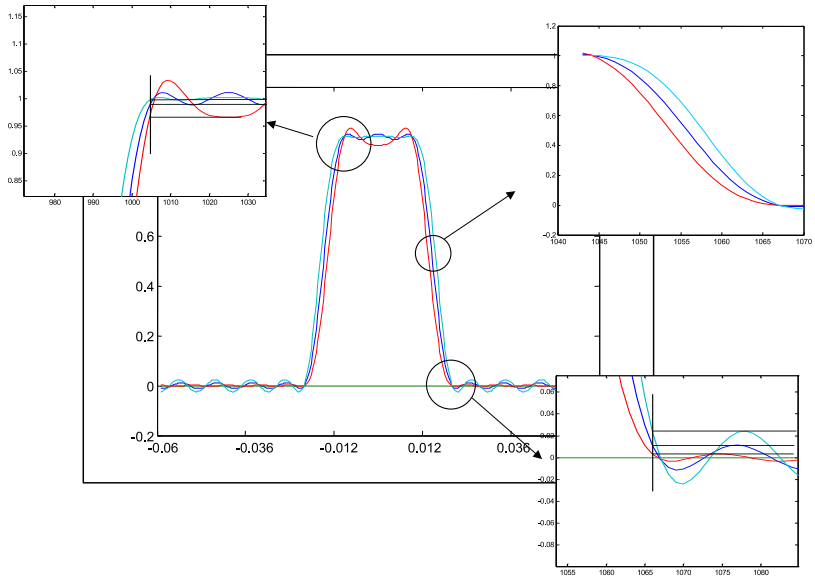

FIG. 6. Série de trois conceptions de filtre RIF où on n'a changé que le rapport δ_1/δ_2 : 0.1, courbe bleu clair, 1 courbe bleu, 10 courbe rouge, donnant des ondulations en bande passante de 0.3%, 1% et 3%. Ceci est à peu près conforme à la prédiction sachant que la bande de transition s'étendait dans les trois cas de 0.10 à 0.20 pour $n = 200$, soit un produit temps bande de transition de 2. Bien évidemment le rapport entre les ondulations d'une optimisation Remez est toujours, lui, parfaitement respecté, ainsi d'ailleurs que les limites de bandes, comme on peut en juger sur les agrandissements au niveau des pieds et des épaules des transitions. La vue dilatée de la bande de transition elle-même montre que tout se joue au niveau des pieds et épaules, puisque au centre les courbes sont des droites parallèles à pente constante (liée à la durée D).

dessin précédent la même durée, mais on a doublé F_t. Si la loi précédente était vraie, la moyenne géométrique des ondulations ne devrait pas changer en fonction du rapport δ_1/δ_2. Le tableau (2) montre qu'il en est à peu près ainsi, mais qu'il faut tout de même admettre des erreurs de prédiction allant jusqu'à 30%.

La pertinence de la figure (6) repose sur le fait que, nous le verrons dans la suite, les ondulations de l'ordre du pourcent à la dizaine de pour cent avec des rapports d'ondulation allant de 0.1 à 10 et des produits temps $\times$ bande de transition de 1.5 à 2.5 sont typiques des conceptions de filtre RIF que nous aurons à effectuer.

3.1.2. *Conception de filtres RIF digitaux specifiés par leur module.* Nous avons vu sur le tableau (1) que dans beaucoup de cas (saturation et inversion par exemple), la quantité d'intérêt n'est dépendante que du module au carré $|\beta|^2(\omega)$. On remarque qu'au moins dans le cas d'une seule bande affaiblie, on peut toujours en ajoutant δ_2 à la réponse fréquentielle d'un filtre *Parks-McClellan* obtenir une fonction $\rho(\omega)$ strictement positive ; plus généralement, dans le cas de plusieurs bandes affaiblies il faudra imposer des ondulation de mêmes amplitude dans toutes ces bandes et ajouter après la conception l'ondulation δ_2 commune à

toutes ces bandes. Cette remarque nous donne la clé de la conception à partir de spécifications en puissance que nous décrivons succinctement.

Si on désire un filtre $h(\omega)$ de support temporel $D = (n+1)T$ dont les spécifications concernant les ondulations d'amplitude sont δ_1, δ_2, mais sans imposer aucune contrainte de phase, on conçoit d'abord un filtre $\rho(\omega)$ correspondant au module au carré du futur filtre H et ayant donc un support temporel double (correspondant à un polynôme d'ordre $2n$) $D_\rho = (2*n+1)T$ avec des spécifications d'ondulation

$$\delta_{\rho 1} = 2\delta,\ \delta_{\rho 2} = \delta_2^2. \tag{172}$$

On surélève ensuite $\rho(\omega)$ de la valeur effectivement obtenue $\delta_{\rho 2}$ et on lui affecte aussi un léger facteur $1/(1+\delta_{\rho 2})$ de façon à garder une amplitude nominale égale à 1 en bande passante. On choisit ensuite une méthode de factorisation de l'équation

$$\bar{H}(Z^{-1})H(Z) = \rho(\omega) \tag{173}$$

pour trouver enfin le polynôme H, d'ordre n, répondant aux spécifications initiales. Bien sûr le plus simple, et c'est ce qui est typiquement fait en synthèse de filtre *RIF* pour les communications [**69**][**72, 73**], est d'utiliser la recherche de solution à phase minimum, telle que nous l'avons présentée ci-dessus à l'occasion de la recherche du filtre A_n à partir de sa puissance spectrale $|A_n(\omega)|^2$. On peut aussi en cherchant les zéros du polynôme tenter, par leur choix à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle unité, de maîtriser la phase de $h(\omega)$(et donc de $\beta(\omega)$)[**74, 70**], ceci essentiellement afin de réduire l'amplitude maximale de la RF. Mais il s'avère que la conception directe de filtre ayant une phase prédéterminée est plus efficace dans ce cas [**75**], en particulier depuis l'apparition du Remez complexe [**76, 77**]. Nous reviendrons sur ce sujet.

En conséquence, l'application principale de ce type de conception est l'utilisation des impulsions dites 'minimum-phase', où le terme minimum-phase se rapporte au fait que le polynôme β est minimum phase. Tout en ayant, comme nous allons le voir dans un instant, une sélectivité plus grande pour une durée D imposée, ces impulsions ont aussi l'avantage d'avoir un temps de rephasage par inversion du gradient beaucoup plus court qu'une RF de type symétrique. Ce rephasage plus court se paie par le fait que la phase résiduelle, après élimination de sa partie linéaire donc, est sensiblement plus élevé que dans le cas d'une RF symétrique. Cependant pour le type de sélectivité utilisé dans ce cas, cela n'amène pas à des erreurs de plus d'une trentaine de degrés en bord de bande, sans dégradation sensible de l'amplitude du signal. Par ailleurs, il faut réaliser que l'on n'a parfois d'autres choix que d'admettre ce léger défaut pour en contre partie gagner ce temps précieux de rephasage : c'est le cas très important de l'impulsion de bascule utilisée dans une séquence de Fast Spin Echo. En particulier en vue d'une acquisition en un seul tir ('single shot'), tous les temps doivent être réduits au minimum de façon à insérer le plus d'échos possible dans les deux ou trois temps de relaxation transversale T_2 pendant lesquels on peut échantillonner le signal. Typiquement dans ce type d'acquisition, les impulsions de refocalisation sont

de 1.2ms de durée (pour une bande à mi hauteur de 1.5 KHz, en tant qu'impulsion de refofalisation *CPMG*, donc très peu sélective), les périodes d'échantillonnage du signal sont de 2ms, le temps inter echos est de l'ordre de 4.5ms à 5ms, il y a donc dans chaque intervalle de 1.3ms à 1.8ms de temps 'morts' dus aux différents gradients d'écrasage, encodage et compensation. Mais l'intervalle inter echos serait beaucoup plus long si une impulsion de bascule à 'phase minimum' n'était pas utilisée. En effet le premier intervalle entre la bascule et la première refocalisation est nécessairement d'une durée moitié de l'intervalle entre deux impulsions de refocalisation, soit 2.25ms à 2.5ms. Cependant, on doit y caser des intégrales de gradient de valeur, certes de valeur divisée par deux, mais en présence de temps morts, tels que transitions de gradients et partie gauche de la première refocalisation, qui sont de durée constante ! L'impulsion min-phase de bascule aura typiquement une partie 'droite' de l'ordre de 0.75ms pour une durée totale de 2 ms, permettant de s'insérer dans cet espace réduit.

La sélectivité d'une impulsion à phase 'libre' telle qu'introduite ici est nécéssairement meilleure que la même impulsion symétrique (de β réel) ayant la même durée. En utilisant la formule (170), mais en y remplaçant D par $2D$ et utilisant les valeurs des ondulations $\delta_{\rho 1}$ et $\delta_{\rho 2}$ de (172), on trouve

$$2D \times F_t = -0.6 \ln \sqrt{2\delta_1 \delta_2^2} - 0.8. \tag{174}$$

En développant l'équation précédente et la comparant à (170), on s'aperçoit que pour obtenir les mêmes ondulations on peut diminuer le produit 'temps $\times$ bande de transition' d'une valeur de $-0.3 \ln \sqrt{\delta_1/2}$. Typiquement on gagne ainsi un demi point à un point du produit ' temps $\times$bande de transition', ce qui est loin d'être négligeable dans un contexte d'impulsions très peu sélectives où ce produit a initialement une valeur de l'ordre de 1.5 à 2. Ceci permet de réduire de 30% la longueur le la RF, en plus de réduire le temps de rephasage dans le cas de l'impulsion minimum phase.

3.2. Conception de filtres Remez adoucis. Comme déjà mentionné les ondulations d'amplitude constante, et s'étalant jusqu'à la fréquence Shannon $1/T$ ne correspondent pas à ce qu'on attend d'un processus physique, alors qu'ils ne posent aucun problème en communication digitale, domaine de prédilection des filtres *RIF*. Ainsi, lorsque l'on diminue la période d'échantillonnage T, à bande passante F_p fixée, ou simplement lorsqu'on augmente le nombre d'échantillons n décrivant la radiofréquence, les ondulations en bande affaiblie se traduisent par l'apparition dans le domaine temporel de deux impulsions de largeur T d'amplitude de plus en plus élevée en extrémité de la modulation $h(t)$. Ces impulsions dures sont liées à l'ondulation en bande affaiblie et s'étendant jusqu'à la fréquence Shannon, comme illustré par la figure (7). Elles se retrouvent sur la modulation RF $b_1(t)$ après l'inversion *SLR* et on peut admettre que la chaîne de transmission aura beaucoup de mal à les reproduire avec fidélité : soit elles seront écrêtées car dépassant la puissance crête maximale de l'émetteur, soit elles seront distordues temporellement à cause de la bande passante limitée de la chaîne. Ceci ne serait pas gênant en soit mais le devient à cause du circuit d'extinction

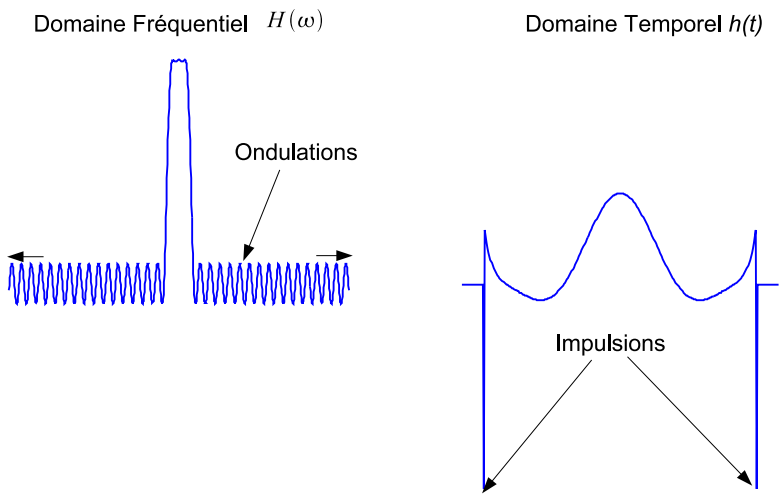

FIG. 7. On représente ici la réponse fréquentielle (a gauche) et le décourt temporel à droite d'un filtre Parks-McClellan h où les ondulations voulues sont de 0.05% en bande passante et 10% en bande affaiblie. Ceci n'est pas absurde car correspond à la conception d'une impulsion de refocalisation spin-écho. Les ondulations en bande affaiblie sont rapidement de période constante (égale à $2/D$) tout en s'étendant sur le reste du cercle unité. Ceci se traduit en temporel par deux impulsions de largeur d'un échantillon (T) en début et fin de la modulation (aux temps $\pm D/2$). Ces impulsions seront en pratique conservées après l'inversion et apparaîtront sous la forme du champ radio fréquence très intense à générer. Il n'y a aucune chance pour que la chaîne d'émission puisse transcrire ces impulsions ; elle seront écrêtées, ou déformées et tronquées. En définitive on ne maîtrise pas la forme temporelle et donc la réponse fréquentielle.

de l'émission, circuit actif à base de diodes ou thyristors amenant une forte réduction du facteur de qualité de l'antenne, qui entre en jeu à la fin de l'émission.

Donc si on veut rester maître de l'excitation physique réelle $b_1(t)$ mieux vaut éliminer ces 'Conolly wings'. Le terme n'est sans doute connu que de quelques spécialistes -peut être d'ailleurs ne sommes nous que trois, John Pauly, Steve Conolly et moi-même - et désigne Steve Conolly de Stanford University qui le premier, en utilisant la commande optimale, la programmation non linéaire et les équations de Bloch [**24**], a remarqué ces impulsions d'extrémité dans la modulation optimale, particulièrement lors de la conception des inversions ou des refocalisations. En fait, dans son cas ces impulsions se présentaient plutôt sous la forme de deux impulsions douces en bord d'intervalle temporel. Elles provenaient des ondulations en bande affaiblie s'étendant sur une plage significative mais cependant limitée du domaine fréquentiel. C'est un peu ce que nous désirerions obtenir, une remontée, ou une descente, douce et ne dépassant pas en amplitude une fraction de l'amplitude maximum de l'impulsion radio fréquence. Pour obtenir ceci nous désirerions être capables de réduire la plage de la bande affaiblie où les ondulations sont d'égale amplitude δ_2.

3.2.1. *Filtres adoucis à phase linéaire.* La solution consiste en l'utilisation d'un pré filtrage - ou post filtrage - avec prise en compte de ce filtrage dans l'algorithme PM ('Prefilter-Equalizer Approach to FIR Design' [**69**] p. 125-135, chapitre 2 ou [**78**]). Plutôt que d'exposer linéairement la technique mieux vaut commencer par le résultat obtenu. La figure (8) montre par quoi est remplacé le filtre original $h_0(t)$, et permet aussi de comparer les réponses en fréquence $H(\omega)$. Le support temporel du filtre, et donc aussi celui de l'impulsion RF, a été légèrement allongé de façon à pouvoir filtrer $h_0(t)$ par une *RIF* $f(t)$, ayant une bande passante limitée et ainsi étalant les impulsions dures de bord. On peut de fait obtenir dans le domaine fréquentiel des ondulations maximales de même amplitude que l'original, tout en ayant une diminution progressive de ces ondulations à hautes fréquences. Cependant ceci demande quelques adaptations ou corrections par rapport à l'idée simple de filtrage brute d'un signal donné par un autre. Considérons d'abord une procédure de filtrage simple :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_0(\omega)F(\omega) \\ h(t) &= h_0(t) \odot f(t). \end{aligned} \tag{175}$$

Le signal h_0 est un signal dont la longueur $D_0 = (n_0+1)T$ est calculée selon la formule (170) et qui généré par l'algorithme $Park-McClellan$. Le filtre $f(t)$ est défini par avance de façon à avoir une réponse plate dans la bande passante mais aussi à présenter une décroissance rapide, par exemple en $1/\omega^2$, dans la bande affaiblie. Sa durée D_f est par exemple ici, $D_f \times F_t = 0.24$, on va voir pourquoi dans un instant. Au total donc la durée du signal résultant $h(t)$ sera donné par

$$D \times F_t = -0.6 \ln \sqrt{\delta_1 \delta_2} - 0.56. \tag{176}$$

A titre d'illustration, le filtre f utilisé dans la figure (8) est une fonction sinc multipliée par une fonction triangle. La fréquence caractéristique F_c de la fonction sinus cardinal est adaptée de façon que la bande passante du filtre résultant soit la bande passante désirée du signal h. Ceci de façon à ne pas trop perturber l'algorithme PM, lors de la conception de h_0. En pratique on a choisi $F_c = F_p + 4 * F_t$, sachant que la bande de transition avec une fenêtre triangulaire de longueur $D_f = 0.24/F_t$est de l'ordre de $8F_t$ et ainsi la bande passante du filtre Remez n'est que très peu perturbée.

Cependant même si la bande passante n'est que très peu perturbée, de quelques pour cents, ceci représente cependant une erreur inadmissible qui doit être compensée. Or si la lecture de la liste des paramètres d'entrée du logiciel $Park-McClellan$, donne l'impression que les fonctions cibles $Des(\omega)$ et les poids, inverse des ondulations recherchées $\delta_1$et δ_2, $W(\omega)$ sont nécessairement constants par morceaux, ce n'est qu'une impression. Il est possible en effet, en rentrant un peu dans le code, de faire varier continûment ces deux fonctions. Ceci permet de lutter contre la distorsion amenée par le filtre $F(\omega)$ [**78**] [**69**]. Pour ceci, lors des spécifications du filtre Remez $H_0(\omega)$, la réponse du filtre $F(\omega)$ est compensée dans la bande passante, mais l'ondulation est laissée iso-amplitude dans la bande

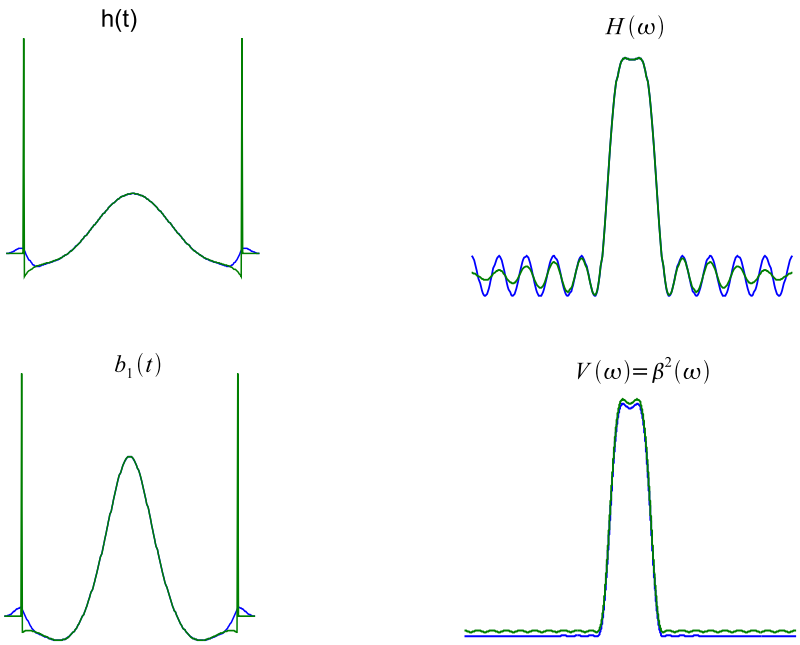

FIG. 8. On indique ici la manière d'adoucir le filtre FIR $h(t)$, dans le cas de la conception d'une impulsion de refocalisation (profil utile $V(\omega) = \beta^2(\omega)$), très encline au phénomène des impulsions de bord, dû à la grande valeur de δ_2 admissible. On pourrait penser adoucir les impulsions dures en convoluant le signal Remez par une courte réponse FIR $f(t)$, en admettant évidemment d'augmenter lègèrement la durée totale de la RF. Pour ne pas pertuber *a posteriori* le resultat il faudrait que la réponse fréquentielle de $f(t)$, $F(\omega)$soit assez large. En fait, on peut *a priori* compenser la distorsion apportée par $F(\omega)$ dans la conception du filtre Parks-McClellan et ainsi obtenir une bande passante parfaitement plate et, en choisissant bien l'augmentation de la durée de la RF (176), obtenir des ondulations maximales de $H(\omega)$ identiques au cas Remez pur, comme on peut le vérifier en haut à droite. La ligne du bas concerne les signaux après inversion *SLR* $b_1(t)$et les réponses fréquentielles $V(\omega)$. La réponse de la solution iso-ondulation d'origine a été décalée vers le haut pour ne pas masquer la solution adoucie qui a le même premier rebond en bande affaiblie (1%) mais dont les suivants deviennent très rapidement invisibles.

affaiblie, et seule l'atténuation apportée au premier extremum y est prise en compte ! Ainsi, on prendra comme spécification dans la bande passante

$$\begin{aligned} Des(\omega) &= 1/F(\omega)\ |\omega| < \omega_p \\ W(\omega) &= (\ \delta_1/\delta_2)F(\omega);\ |\omega| < \omega_p \end{aligned} \tag{177}$$

alors qu'en bande affaiblie on se contentera de compenser uniquement l'amplitude du premier extremum de l'erreur

$$\begin{array}{rcl} Des(\omega) & = & 0 \\ W(\omega) & = & F(\omega_s);\ |\omega| > \omega_s. \end{array} \tag{178}$$

On obtient en sortie de la fonction $Park-McClellan$ un filtre $H_0(\omega)$ dont les ondulations, ainsi que la valeur médiane en bande passante, croissent légèrement avec ω, mais qui présente toujours des ondulations d'amplitude constante dans la bande affaiblie. Convoluant enfin $h_0(t)$ par $f(t)$, ou multipliant en fréquentiel $H_0(\omega)$ par $F(\omega)$, on obtient une réponse fréquentielle $H(\omega)$ qui au contraire est de médiane et d'ondulation constante en bande passante, mais dont l'ondulation en bande affaiblie décroît selon la loi $F(\omega)$.

On peut se demander, puisque l'algorithme $Park-McClellan$ admet des poids variables, pourquoi n'avoir pas simplement spécifié un poids variable en bande affaiblie, par exemple $W(\omega) = k\omega^2$, pour $|\omega| > \omega_s$, sans rien modifier à la bande passante. On peut générer ainsi directement un filtre $H(\omega)$ ayant une décroissance voulue à haute fréquence, et cela sans s'embarrasser des deux intermédiaires $F(\omega)$ et $H_0(\omega)$. La réponse est qu'effectivement ceci est possible, mais que cette approche n'est pas extensible au cas où, la phase de $\beta(\omega)$ étant sans intérêt, on préfère concevoir par Remez le filtre $|\beta|^2$ (conception par le module de β). En effet ceci obligerait à pouvoir lier, dans la bande affaiblie, la valeur médiane et l'ondulation, ce que *ne peut pas* faire l'algorithme $Park-McClellan$. A l'inverse, l'approche par pré filtrage est capable de traiter ce cas, comme nous le décrivons maintenant rapidement.

3.2.2. *Filtres adoucis à phase minimum.* L'algorithme devient une combinaison du pré filtrage et de la conception à partir du carré du module présenté au paragraphe précédent. On commence par trouver un filtre représentant le module au carré $\rho_0(\omega) = H_0\bar{H}_0(\omega)$ en concevant comme ci-dessus par $Park-McClellan$ un filtre d'ondulation constante en bande affaiblie, mais en pré-compensant par $F\bar{F}(\omega)$ l'amplitude et les ondulations en bande passante. On obtient ainsi un FIR symétrique, appelons le $L(\omega)$, obtenu avec les spécifications, en bande passante

$$\begin{array}{rcl} Des(\omega) & = & 1/(F\bar{F}(\omega)),\ |\omega| < \omega_p \\ W(\omega) & = & \frac{2\delta_1}{\delta_2^2} F\bar{F}(\omega),\ |\omega| < \omega_p \end{array} \tag{179}$$

et en bande affaiblie

$$\begin{array}{rcl} Des(\omega) & = & 0 \\ W(\omega) & = & W(\omega_s) = F\bar{F}(\omega_s),\ |\omega| > \omega_s. \end{array} \tag{180}$$

Comme pour le cas d'ondulations constantes [**69**] un bon candidat pour la fonction $\rho_0(\omega) = H_0\bar{H}_0(\omega)$, est alors obtenu en ajoutant la constante ${\delta_2}^2$ (effectivement obtenue) à $L(\omega)$, et en effectuant une légère mise à l'échelle de façon à garder la valeur médiane 1 en bande passante :

$$\rho_0(\omega) = (L(\omega) + {\delta^2}_2(\omega_s))/(1 + {\delta^2}_2(\omega_s)). \tag{181}$$

Enfin, on obtient $H_0(\omega)$ par une des méthodes de factorisations abordées dans une des précédentes sections. Multipliant ensuite $H_0(\omega)$ par $F(\omega)$ on obtient finalement $H(\omega)$, qui est iso-ondulation (de valeur δ_1) en bande passante, et d'ondulation extrême δ_2 en bande affaiblie, mais décroissant par exemple en $1/\omega^2$.
Une bonne estimation du produit temps $\times$bande passante pour ce type de conception est

$$D \times F_t = -0.3 \ln \sqrt{2\delta_1 \delta_2^2} + 0.16 \tag{182}$$

On utilisera donc dorénavant pour calculer la durée D du filtre $h(t)$ la formule (176) pour un filtre symétrique (ou à phase linéaire) et (182) pour une conception minimum ou maximum phase, avec la version 'adoucie' de l'algorithme $Park-McClelllan$.

3.3. Des spécifications physiques aux spécifications de filtre. Après ce long détour dans le domaine des filtres RIF, revenons à l'utilisateur. L'utilisateur est intéressé par l'aspect du profil de coupe de la valeur d'intérêt V, que celle ci soit M_{xy}, M_z, β^2 ou autre, avec des erreurs en bande passante $\pm\Delta_1$ et des erreurs en bande affaiblie $\pm\Delta_2$. Ces erreurs sont a priori du même ordre de grandeur, disons le pour-cent ou une petite fraction de pour-cent pour une sélection de coupe en imagerie $2D$. Notons que ces erreurs $\pm\Delta$ sont comptées en relatif par rapport à la valeur d'intérêt V_1 dans la bande passante. En fait pour être plus général encore et traiter plus facilement les cas où la coupe d'intérêt est en 'négatif' comme dans le cas d'une saturation ou d'une inversion, nous définirons ici les facteurs d'ondulations effectives Δ_1, Δ_2 comme étant les ondulations absolues dV_1et dV_2 *rapportées à l' excursion* de la variable V

$$\Delta_1 = \frac{\mathrm{dV}_1}{|V_2 - V_1|}, \Delta_2 = \frac{\mathrm{dV}_2}{|V_2 - V_1|}. \tag{183}$$

Le clinicien sera intéressé ensuite par la largeur à mi-hauteur du profil ou $FWHM$ (full width half maximum). Plus ou moins implicitement il s'attendra à obtenir une forme de coupe trapézoïdale, c'est à dire qu'il s'attendra à trouver une bande de transition quasi linéaire, ou au moins de type sigmoïdal symétrique autour des points $\pm FWHM/2$. De fait, le contraste des images, c'est à dire la précision de l'angle de nutation dans la bande passante (Δ_2), et la valeur de la bande à mi-hauteur sont les seuls paramètres qu'un organisme de certification comme la FDA (Food and Drug Administration) vérifie. En effet il lui faut s'assurer qu'un signal à bruit meilleur trouvé sur un système d'imagerie ne provient pas simplement d'un angle de nutation supérieur à celui spécifié ou d'une épaisseur effective (mesurée par le $FWHM$) supérieure à celle affichée. En général ce type d'erreur bénéfique dans une expérience simple et ne testant qu'une seule coupe ou utilisant un temps de repousse très grand, ne l'est plus lorsque les coupes sont rendues jointives ou que le temps de repousse est diminué en dessous de T_1. Alors ces mêmes erreurs font diminuer le signal et il est donc de l'intérêt du concepteur de respecter les spécifications. Il n'empêche que la donnée du $FWHM$ en Hz , l'angle de nutation, ou plus généralement la valeur désirée

β_1 en bande passante, ainsi que le temps allouable à la *RF* sont souvent les seules spécifications que reçoit le concepteur d'impulsions. A priori son rôle est alors de réduire au minimum la bande de transition ou, dit autrement, de rendre le profil effectif trapézoïdal le plus 'rectangulaire' possible, tout en vérifiant dans un deuxième temps qu'il ne viole pas les contraintes de champ B_1 utilisable et aussi les contraintes de déposition d'énergie. Or l'algorithme Parks-McClellan *(PM)* s'attend à recevoir la valeur des fréquences de début et de fin de chaque bande et non pas des bandes à mi-hauteur des transitions ; il attend de plus la valeur nominale dans chaque bande passante et l'erreur relative admise dans chacune de ces bandes passantes. Oui, mais alors, quel est le rapport entre δ_1 et δ_2 et Δ_1, Δ_2 ou plus précisément comment fixer δ_1/δ_2 étant donné Δ_1, Δ_2 ? Par ailleurs, comment fixer f_s, f_p étant donné $FWHM$? Les relations de Pauly, ici légèrement adaptées, permettent de répondre à ces questions.

3.3.1. *Relations de Pauly.* La lecture de l'article [**33**] peut être parfois être rendue fastidieuse par le nombre important de cas particuliers à traiter. Nous proposons ici des définitions un peu plus générales qui simplifient, grâce à quelques remarques, l'exposé.

Rappelons que le but est d'aller des spécifications de l'utilisateur (ou de son porte parole), les facteurs d'ondulations admises Δ_1, Δ_2, vers les paramètres d'entrée de la fonction Remez δ_1, δ_2, qui finalement à partir de (176) permettent de déterminer la durée D de la *RF*. On propose alors la suite des opérations suivantes :

On suppose que grâce à des équations de la physique, aidée parfois de quelques approximations, voir le tableau (1), on sait écrire une fonction liant β à l'entité utile V

$$V = F(\beta). \tag{184}$$

On doit savoir inverser cette relation, si nécessaire en le faisant par morceaux,

$$\beta = F^{-1}(V) \tag{185}$$

On suppose données les deux valeurs nominales V_1 V_2. On inverse la relation F pour trouver les valeurs correspondantes de β (dans notre cas on aura toujours β_2 =0)

$$\beta_1 = F^{-1}(V_1),\ \beta_2 = F^{-1}(V_2) \tag{186}$$

Étant donné les facteurs d'ondulation effective, $\Delta_1$and Δ_2, avec les définitions (183), on trouve les ondulations absolues admises du profil d'intérêt

$$\mathrm{dV}_1 = \Delta_1|\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1|,\ \mathrm{dV}_2 = \Delta_2|\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1|. \tag{187}$$

On inverse la variation dV_1 autour de (V_1, β_1) d'une part et dV_2 autour de (V_2, β_2)

$$\beta_1 + \mathrm{d}\beta_1 = \mathrm{F}^{-1}(V_1 + \mathrm{dV}_1),\ \beta_2 + \mathrm{d}\beta_2 = \mathrm{F}^{-1}(V_2 + \mathrm{dV}_2). \tag{188}$$

Généralement ceci conduit simplement à prendre la dérivée première de la fonction $\beta(V)$ ou $V(\beta)$. Cependant dans les cas où celle-ci s'annule on doit pousser à l'ordre supérieur ou simplement obtenir numériquement la valeur en deux points de la courbe. Enfin on normalise par rapport à β_1 les variations $d\beta_1$, $d\beta_2$ ainsi obtenues pour obtenir

$$\delta_1 = d\beta_1/\beta_1, \delta_2 = d\beta_2/\beta_1 \tag{189}$$

Une remarque importante est que on peut tout aussi bien considérer une nouvelle variable effective $V' = V_2 - V$ dans le cas d'une coupe en 'négatif'. Cela renverse le profil tout en conservant des facteurs d'ondulations effectives identiques. Ceci permet de traiter l'inversion et la saturation de la même manière que le spin-echo. Une autre remarque utile dans beaucoup de cas est que si la fonction $V = F(\beta)$ est une fonction puissance

$$V = k\beta^y \tag{190}$$

on trouve facilement que

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{y}. \tag{191}$$

En ce qui concerne la bande affaiblie, autour de $\delta_2 = 0$, $\Delta_2 = 0$, on écrit les cordonnées d'un deuxième point sur la courbe, $dV_2 = k(d\beta_2)^y$, et après division terme à terme par $V_1 = k\beta_1^y$ on trouve finalement

$$\Delta_2 = \delta_2^y,\ \delta_2 = \Delta_2^{1/y} \tag{192}$$

On remarque que les relations ne font plus intervenir les valeurs nominales en bande passante, β_1,V_1 non plus que le gain k.

3.3.2. *Spécifications pour la bascule petit angle, la saturation, l'inversion, la refocalisation spin-echo ou CPMG.* Il se trouve que le basculement à faible angle, ou la refocalisation *CPMG* correspondent à $y = 1$. Le spin écho et par transformation, la saturation et l'inversion correspondent à $y = 2$, et ainsi pratiquement tout le tableau des impulsions classiques est résolu sans coup férir.

On a donc par application de ces deux remarques

$y = 1$ Bascule petit angle, refocalisation CPMG : $\delta_1 = \Delta_1$, $\delta_2 = \Delta_2$. Typiquement pour des facteurs d'ondulations effectives de 1% les ondulations de spécification Remez sont identiques et égales à 1%.

$y = 2$ Écho de spin, Saturation, Inversion : $\delta_1 = \Delta_1/2$, $\Delta_2 = \delta_2^2$ ou $\delta_2 = \sqrt{\Delta_2}$. Il faut seulement noter que bien que l'ondulation du filtre h en bande affaiblie soit bipolaire $\pm\delta_2$, l'ondulation visible est unipolaire, de 0 vers $+\Delta_2$ dans le cas du spin écho, et de 1 vers $1 - \Delta_2$ pour la saturation ou l'inversion. Typiquement pour des facteurs d'ondulations effectives de 1% les ondulations de spécification Remez sont de 0.5% en bande passante et de 10% en bande affaiblie.

Ces résultats sont conformes aux résultats de l'article [**33**], mais d'exposition beaucoup plus simple à cause de notre définition des facteurs d'ondulation relativement à l'*excursion*

(183) alors que l'article le fait parfois par rapport à l'aimantation maximale atteignable ('1'), parfois par rapport à ce qui correspond à l'excursion . Il suffit de tenir compte de cette excursion, qui est égale à 2 dans le cas de l'inversion, à 1 dans le cas de la saturation et de l'écho de spin, pour retrouver les résultats du tableau I de l'article. Ceci à l'exception des valeurs concernant le spin écho et l'inversion en bande passante, δ_1, qui sont deux fois plus contraignantes dans l'article que ci-dessus. Ceci demande une explication.

Dans le cas d'une inversion ou d'un écho de spin, l'article considère que la valeur nominale en bande passante correspond de façon draconienne à $\Theta_1 = \pi$, ou de façon équivalente $\beta_1 = 1$. Comme la composante $\beta(\omega)$, ou le filtre RIF $h(\omega)$ qui dans ce cas lui est identique, ne peut dépasser 1 on est obligé de le faire osciller entre $1 - 2\delta_1$ et 1, avec une valeur médiane égale à $1 - \delta_1$. Alors l'article comptabilise l'erreur unilatéralement de 1 à $1 - 2\delta_1$. Nous considérons ici que l'erreur est bilatérale autour de $1 - \delta_1$ et donc réduite de moitié. En effet il est illusoire de prétendre pouvoir maîtriser le gain radio fréquence de façon à avoir un angle de 180°, et c'est même volontairement qu'on réduira, lors de la conception, l'angle de nutation à $\Theta_1 = 170°$ ou même $\Theta_1 = 150°$. En effet cette réduction change très peu la valeur nominale V_1 car l'effet est du deuxième ordre par rapport à Θ_1, mais réduit sensiblement l'énergie déposée par l'impulsion. En effet comme dit plus haut les derniers degrés d'angle de nutation autour de 180° coûtent très cher en puissance car le maximum des ondulations de $\beta(\omega)$ se rapprochent de 1. En conséquence il vaut mieux être réaliste et prévenir l'utilisateur du programme que la valeur nominale de β_1 ne peut pas être 1 mais par exemple 0.9962 (correspondant à $\Theta_1 = 170°$) et que *les ondulations obtenues s'entendent autour de cette valeur.*

Il nous reste à traiter la cas de l'impulsion de bascule à 90°.

3.3.3. *Spécification de la bascule à 90°.* En ce qui concerne les spécifications préconisées dans ce cas par l'article, la position à prendre est simple : Il ne faut *surtout pas* utiliser les spécifications de [**33**] pour un angle de 90°, ou alors il faut être absolument sûr de la valeur du champ B_1émis (antenne parfaitement homogène, pas d'absorption par l'objet ou le patient, calibration remarquable de l'émetteur). Examinons le pourquoi. La quantité d'intérêt est $V = 2|\alpha||\beta| = \sin(\Theta)$. Sa valeur idéale en bande passante $V_1 = 1$ correspondant à $\beta_1 = 1/\sqrt{2}$, en bande affaiblie $V_2 = 0$ et l'excursion est $|V_1 - V_2| = 1$. La bande affaiblie est identique au cas de la bascule petits angles et on trouve directement $dV_2 = 2d\beta_2$et tenant compte de l'excursion de 1, et de la définition (189), $\Delta_2 = \sqrt{2}\delta_2$. En bande passante, la relation $V(\beta)$ peut s'écrire

$$V^2 = 4(1 - |\beta|^2)|\beta|^2 \tag{193}$$

montre que V^2, et donc V, passe par un maximum (égal à 1) pour $|\beta|^2 = 1/2$. La dérivée première s'annule donc et il faut passer à l'ordre supérieur ; plus simplement on peut approcher la formule précédente, autour de $|\beta|^2 = 1/2$, $V = 1$ par

$$V^2 \simeq 1 - 4(|\beta|^2 - 1/2)^2 \tag{194}$$

et posant, par définition de δ_1 (189) $\beta_1 = (1+\delta_1)/\sqrt{2}$, et effectuant la différence totale on a

$$V_1 + 2V_1 dV_1 = 1 - 4\delta_1^2 \tag{195}$$

et enfin après évidente simplification,

$$\Delta_1 = -2\delta_1^2. \tag{196}$$

Cette dépendance quadratique semble autoriser des ondulations d'amplitude δ_1 très importante en bande passante, de l'ordre de 7% pour une ondulation effective Δ_1 de 1%. Le danger d'une telle spécification est qu'on doit pouvoir admettre des erreurs de champ b_1, ou de calibration globale du gain de l'émetteur, ou les deux à la fois de l'ordre de quinze à vingt pour cent. Ce qui signifie que, croyant imposer en tout point de la bande passante, une nutation de 90° il se peut fort bien qu'on y impose au moins localement des nutations de l'ordre de 70°, ou inversement, 110°. Alors la dépendance au premier ordre réapparaît, car alors $|\beta|^2 = 0.33$ et la fonction $V^2(|\beta|^2)$ n'est plus à un maximum. Tous calculs effectués, on peut écrire une formule de liaison plus réaliste car développée autour de 70°,

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\delta_1.. \tag{197}$$

En résumé et en se rappelant de nos définitions (183) faisant toujours intervenir l'excursion totale du profil, le tableau (3) donne finalement les relations sécurisées à utiliser.

	Bascule	Saturation	Inversion	Refocalisation	CPMG
$\delta_1 =$	Δ_1, @0° $\Delta_1/2$, @75°	$\frac{1}{2}\Delta_1$	$\frac{1}{2}\Delta_1$	$\frac{1}{2}\Delta_1$	Δ_1
$\delta_2 =$	Δ_2, @0° $\Delta_2/\sqrt{2}$, @75°	$\sqrt{\Delta_2}$	$\sqrt{\Delta_2}$	$\sqrt{\Delta_2}$	Δ_2

TAB. 3. Ce tableau permet d'obtenir les ondulations à prescrire sur le filtre passe bas δ_1,δ_2 en fonction des erreurs maximales *relatives* (définitions (183)) tolérées sur le profil de coupe. Ces valeurs diffèrent quelque peu des valeurs données dans l'article [**33**], car les valeurs singulières des angles, 90° et 180°, ont été remplacées par des valeurs plus réalistes de 75°et 150°. Ainsi pour l'inversion et la refocalisation nos valeurs de $\delta_1$sont plus strictes dans un facteur 2, simplement parce que l'article prend alors comme définition de Δ_1 la valeur crête-crête de l'oscillation, alors qu'ici Δ_1 est l'amplitude (bilatérale) de l'oscillation. En ce qui concerne la bascule à 90°dans la bande passante, les différences sont importantes : en effet les conclusions de l'article [**33**] sont dangereuses car elles jouent sur une erreur effective $\Delta_1$qui serait du deuxième ordre par rapport à δ_1,ce qui devient rapidement faux lorsque l'angle de nutation dans la bande s'éloigne de 90°. Aussi, l'article ne prend pas toujours comme référence l'excursion totale du profil, ce qui différencie inutilement l'inversion, la saturation et la refocalisation.

3.3.4. *Détermination des bords de bandes.* Il reste à fixer les fréquences réduites f_p et f_s que l'algorithme Parks-McClellan attend ; cela revient à fixer de façon équivalente les fréquences physiques (en Hz) $F_p = f_p/T$ et $F_s = f_s/T$. On trouve expérimentalement qu'en choisissant des ondulations effectives Δ_1 et Δ_2 égales et pour le type d'impulsions classiques du tableau (3) les réponses $V(\omega)$ sont pratiquement dans la bande de transition toujours symétriques, et ainsi une bonne stratégie pour obtenir la bande à mi hauteur ($FWHM$) voulue est de poser

$$F_p + F_s = FWHM, \tag{198}$$

(on rappelle que $FWHM$ est bilatérale, alors que nos conventions, ou plutôt celles de l'algorithme *PM* considèrent f_p et $f_s$comme unilatéral). Comme on connaît désormais la bande de transition $F_t = F_p - F_s$ nécessaire à l'obtention des ondulations voulues, ceci revient à poser

$$F_p = f_p/T = \frac{FWHM - F_t}{2};\ F_s = f_s/T = \frac{FWHM + F_t}{2}. \tag{199}$$

3.3.5. *Vérification.* Il suffit après le calcul du filtre h, puis de β, l'obtention du filtre à phase minimum A et enfin l'inversion *SLR*, de vérifier, par exemple par *SLR* direct qu'on obtient bien le $\alpha(\omega)$ et le $\beta(\omega)$ voulus et à partir de ces valeurs de recalculer la variable d'intérêt $V(\omega)$ et enfin de vérifier la bande à mi hauteur obtenue. On sera en général très satisfait du résultat obtenu, la différence entre le résultat et la spécification n'excédant pas quelques pour cent, sauf en ce qui concerne les impulsions de bascule à 90° où nous avons délibérément réduit l'ondulation en bande passante, ce qui entraîne généralement l'obtention d'une bande à mi-hauteur trop grande. Dans tous les cas, la suite des opérations pré-citées ne demande que quelques millisecondes sur les calculateurs actuels, et il est facile d'itérer ou même d'automatiser cette opération sous forme d'une optimisation mono dimensionnelle qui converge en quelques cycles.

4. Développements postérieurs ou induits

4.1. Sélection multidimensionnellle. La première extension de l'algorithme concerne les impulsions selectives à plusieurs dimensions. Le principe des impulsions spectro-spatiales, est exposé dans [**79**] pour les petits angles et donc sans relation avec *SLR*, mais nous pouvons l'expliquer plus rapidement avec les termes et techniques introduits dans ce chapitre.

On peut chercher à n'exciter qu'une coupe dans l'espace et, dans cette coupe, chercher à n'exciter que la région des résonances de l'eau sans au contraire basculer les aimantations résonant à la fréquence de la graisse. Cette sélection peut être réalisée par un train d'un petit nombre, disons six à sept, d'impulsions sélectives spatialement. Dans la version la plus simple à analyser, mais qui se trouve être aussi la plus robuste, toutes ces impulsions sont appliquées avec le même gradient de sélection et excitent donc la même coupe spatiale.

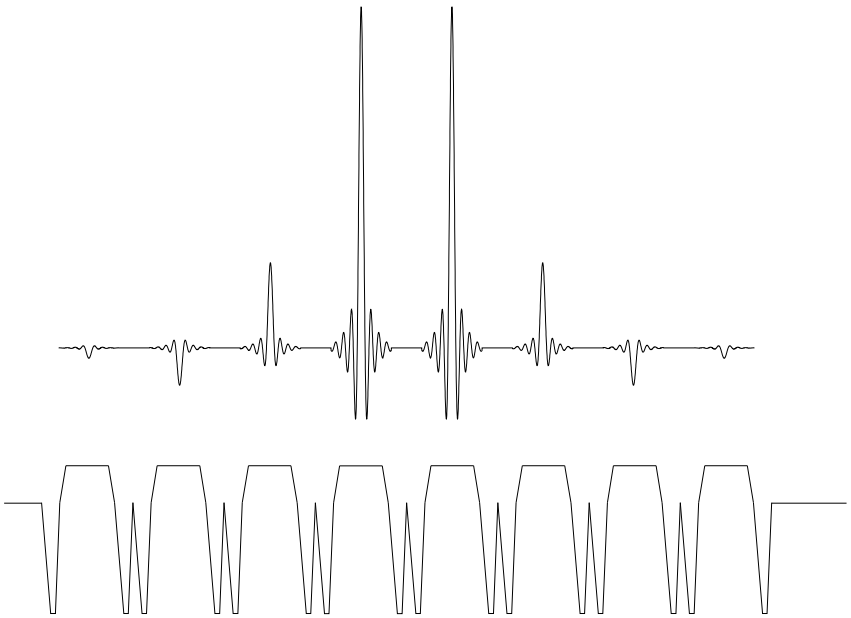

FIG. 9. Exemple d'une impulsion spectro-spatiale. Une impulsion continue, ici assez sélective (10Khz de bande passante pour 1.5Khz de bande de transition), est modulée en amplitude. Les gradients de sélection sont rephasés mais aussi préphasés de façon à ne plus avoir de facteurs de phase et que chacun des blocs de sélection géométrique se comporte comme une nutation pure. La suite des huit amplitudes pour chacune des impulsion est calculé par la procédure *SLR* de façon à avoir une nutation finale de 90° pour un un décalage chimique de zéro, et une nutation nulle pour des décalages chimiques de l'ordre de la différence eau-graisse.

Par ailleurs le gradient de sélection est inversé après chaque impulsion de façon à rephaser l'aimantation, mais aussi à la préphaser pour l'impulsion suivante : donc on insère entre chaque bloc de sélection de coupe, un gradient rephaseur annulant l'intégrale totale du gradient de sélection de centre à centre de deux impulsions RF successives ; en termes mathématiques ceci veut dire que les phases de α et β sont compensées et qu'au moins en bande passante les impulsions *RF* sélectives sont equivalentes à des nutations pures. Dans ces conditions la i^{me}impulsion, et ses gradient associés, joue le rôle d'une implusion dure de valeur $\Theta_1(i)$ dans la coupe séléctionnée, $-\omega_p$, ω_p , et de valeur $\Theta_2(i) = 0$ dans la bande externe et tous les intermédiaires dans la bande de transition. Par contre il n'y a plus aucune précession entre ces impulsions dures. Ce dernier point est cependant un peu faux : Il n'y a plus de précession du fait de la sélection le long de l'axe $\omega = \gamma G_s z$, mais il reste la précession due aux non homogénéités du champ central ou au déplacement chimique ω_{ch} ! Supposons ici les défauts d'homogénéité négligeables et ne conservons que l'influence du déplacement chimique et appelons T le temps entre les centres des impulsions selectives. A une élongation z fixée et donc à ω fixé, la séquence $\Theta(i)$ des nutations auxquelles les impulsions RF sont equivalentes est alors donnée. Entre chacune de ces nutations s'insère une précession de valeur constante $\omega_{ch}T$; posant $Z = \exp(j_{ch}\omega s\mathrm{T})$ on se retrouve dans le

schéma même de l'algorithme étudié dans ce chapitre. Ainsi, on peut définir la suite de nutations $\Theta_1(i)$ qui permet d'obtenir une nutation globale de 90° à la fréquence de résonance chimique $\omega_{ch} = 0$, correspondant par exemple à l'eau, mais qui au contraire ne bascule pas l'aimantation à la pulsation chimique de la graisse (de l'ordre de 200Hz à 1.5 teslas). Pour cela on pourra, par *Remez*, trouver un filtre *RIF*, $\beta(\omega)$, defini par six ou sept impulsions de Dirac. Pour accroitre la sélectivité, on aura cependant intérêt à utiliser une conception par $|\beta(\omega_{ch})|^2$ et obtenir ainsi une suite de type minimum phase. Ceci présentera par ailleurs l'avantage de réduire le temps d'écho. Il sera ensuite préférable d'utiliser l'inversion *SLR* pour obtenir la suite de nutations $\Theta_1(i)$, de façon à éliminer l'influence des non linéarités. Cette suite $\Theta_1(i)$ sert alors à moduler le gain d'émission de l'impulsion *RF* douce qui réalise la sélection le long de l'axe géométrique z.

Comme le plus grand des angles $\Theta_1(i)$ sera de l'ordre de 30° chacune des sélections géométriques se fera à petits angles rendant alors l'hypothèse linéaire tout à fait valide. Cette onde *RF* peut donc être conçu en dehors de tout algorithme de type *SLR*, ce qui n'empêche pas d'utiliser pour sa conception un algorithme optimal, de type *Remez* ou au moins Kaiser-Bessel.

La sélection selon deux dimensions de l'espace se fait de manière tout à fait identique en remplaçant le codage en déplacement chimique par un codage géométrique le long de la deuxième direction disons y, c'est à dire en insérant entre chacune des impulsions sélectives en z un petit gradient d'encodage le long de y. La différence entre les deux applications est que lorsque la deuxième direction est le déplacement chimique, l'excitation image à la 'fréquence Shannon' ($\omega_{ch} = 2\pi/T$) n'est pas gênante, ce qui n'est pas le cas lorsque la deuxième direction est géométrique. En pratique le nombre n d'impulsions permettant de rejeter l'image en dehors du volume utile peut devenir rédhibitoire, sauf si on ne cherche à sélectionner qu'un demi-champ de vue de façon assez grossière. En bref cette technique n'a été que rarement appliquée pour sélectionner une deuxième direction géométrique. Par contre elle trouve un usage intensif sous la forme de la bascule spectralement et spatialement sélective au début des séquences écho-planar.

Comme on l'a laissé supposé, l'utilisation de l'algorithme *SLR* n'est pas absolument indispensable, même lorsque l'angle de nutation atteint 90°. Elle l'est cependant tout à fait lorsqu'on cherche à réaliser une impulsion de refocalisation ou une implusion d'inversion spectro-spatiale [**80**]. Il est évidemment encore plus nécessaire dans le cas d'une sélection grand angle à trois dimensions [**81**][**82**].

4.2. Les impulsions à très large bande. On définit la sélectivité d'une coupe par le rapport entre la bande de transition et la bande à mi-hauteur

$$S = \frac{FWHM}{F_s - F_p}. \tag{200}$$

Lorsque la durée D de l'impulsion est figée et par conséquent la bande de transition $F_s - F_p$, un moyen simple d'augmenter la 'sélectivité' S est évidemment d'augmenter la

bande à mi-hauteur $FWHM$. Toutefois on risque rapidement de rencontrer la contrainte d'amplitude maximale de la chaine émettrice. En effet définissons l'amplitude maximale de la RF par

$$b_{1M} = \max |\vec{b}_1|. \tag{201}$$

Alors, pour des angles en bande passante Θ_1 petits, l'approximation linéaire (123) est valide, ce qui lie $b_1(t)$ à $b(\tau)$ et à sa transformée de Fourier $B(\omega)$ et après intégration dans le domaine fréquentiel et simplification on trouve

$$\gamma b_{1M} \simeq \Theta_1 \times FWHM \tag{202}$$

Cette loi de proportionnalité à l'angle de nutation en bande passante $\Theta_1$est on le sait assez approximative, surtout lorsque cet angle dépasse 90° mais elle est valide à quelques pour cent près pour des angles de 30° ; par contre, à $\Theta_1$figé, la proportionnalité à la bande à mi-hauteur $FWHM$ est assez bien respectée.

Un moyen de réduire l'amplitude de la RF consiste à admettre un $b_1(t)$ ayant une phase, et donc un $b(\tau)$ non réel et donc dans le domaine fréquentiel un $B(\omega)$ avec une phase autre que linéaire ou minimum. C'est pourquoi on ne pourra réduire de cette façon la puissance crête que pour les impulsions où la phase finale de l'aimantation ne nous importe guère, c'est à dire essentiellement les impulsions de saturation et les impulsions d'inversion. Notons cependant que cette assertion doit être pondérée par le fait qu'on peut compenser mutuellement la phase de deux impulsions en séquence comme dans le cas d'un écho de spin où les deux impulsions de bascule et de refocalisation sont à phases quadratiques adaptées l'une à l'autre [**83**]. Nous nous restreindrons cependant ici aux impulsions simples de saturation ou d'inversion. On doit noter d'abord que la manipulation de la phase du polynôme $B(\omega)$ ne modifie pas l'énergie totale de l'impulsion, celle-ci reste proportionnelle à la bande passante totale et aussi au carré de l'angle de nutation dans cette bande, au moins à petits angles (159).

Shinnar [**74**] a proposé en 1994 de partir d'une conception en $|B(\omega)|^2$comme on le fait pour une impulsion dite minimum phase mais, par transport de certains zéros de $B(Z)$ de l'intérieur vers l'extérieur du cercle unité, de changer la phase $\angle B(\omega)$. En faisant la transformée de Fourier inverse on trouve généralement un $b(\tau)$ dont l'amplitude maximum est réduite, et après inversion SLR une amplitude $\max |\vec{b}_1|$ également réduite. Il suffit, s'il y a p zéros en regard de la bande passante (les autres $n-p$ zéros sont sur le cercle unité), d'effectuer l'opération pour les 2^p choix possibles et de conserver celle réduisant le plus l'amplitude crête du champ RF. Comme déja dit, cette technique a été généralisée par Pickup [**70**] aux polynômes $B(Z)$ et $A(Z)$.

La faiblesse de cette technique réside dans le fait qu'il n'y aucune raison pour que la réduction de la puissance crête soit maximale. En effet la conception du filtre $\rho(\omega) = |B(\omega)|^2$ se fait sans aucune référence à la phase de $B(\omega)$, c'est d'ailleurs la raison pour laquelle on

obtient une meilleure sélectivité en amplitude. Il n'y a donc aucune raison pour que la position des zéros soit telle que, après inversion, on obtienne une phase $\angle B(\omega)$ susceptible de réduire au mieux l'amplitude de $b(\tau)$. Il faut pour cela mettre en recherche directement la phase du polynôme B, au prix peut-être d'une ré-augmentation du produit temps par bande de transition qui sera intermédiaire entre (176) et (182).

Or au moins dans l'hypothèse petits angles, c'est à dire si on assimile la réduction de l'amplitude de $b_1(t)$ à la réduction de $b(\tau)$, on peut utiliser des résultats classiques du traitement du signal et inférer que la phase $\angle B(\omega)$, qui étalera au mieux la puissance tout le long du décourt temporel D, est une phase quadratique. C'est effectivement une technique classique en communication qui est très documentée [**51**] et d'ailleurs connue depuis très longtemps en *RMN*, mais dans un contexte de signaux quasi infinis [**84**]. Dans le cas des signaux de longueur finie, elle nécessite quelques adaptations et sacrifices. Considérons d'abord le cas idéal pour fixer les idées. Par modulation de la phase on devrait pouvoir étaler l'energie dans tout le domaine temporel en obtenant une amplitude constante $|b_1(t)| = b_{1M}$. Or, dans le domaine fréquentiel l'énergie s'écrit approximativement (160) $E \simeq FWHM \times \Theta^2/\gamma^2$. Donc dans ce cas idéal, en égalant les énergies dans les deux domaines,

$$\gamma^2 \hat{b}_{1M}^2 D = FWHM \times \Theta_1^2, \tag{203}$$

on trouve facilement que la plus petite amplitude de champ *RF* atteignable, $\hat{b}_{1M}$ serait

$$\gamma \hat{b}_{1M} = \sqrt{\frac{FWHM}{D}}\Theta_1, \tag{204}$$

ce qui en comparant au champ d'une impulsion sans phase (202) amène une réduction dans un rapport $\sqrt{D \times FWHM}$ soit la racine carré de ce qu'on appelle le produit BT, pour produit bande (totale) par temps. Dans la pratique avec une phase quadratique et sans adaptation, le champ $b_1(t)$ n'est pas d'amplitude constante et le maximum est multiplié dans un rapport $\sqrt{2}$ par rapport à cette valeur théorique (204). Ce rapport est appelé le facteur de crête ('crest-factor') et certaines techniques permettent de le réduire [**69**]. Toutefois ce rapport $\sqrt{2}$ atteint par la modulation de phase quadratique peut être considéré comme acceptable, comparé à ce que les techniques telles que [**74**] permettent. Aussi, en 1995 j'ai proposé [**85**] un algorithme de conception de filtre *RIF* à phase quadratique basée sur un moindre carré pondéré, l'algorithme min-max de type Remez à valeurs complexes de l'époque n'étant pas utilisable car excessivement long. Ce type de filtre $\beta(Z)$ a ensuite été utilisé pour la conception de saturations très sélectives (VSS) et appliqué à la réduction du champ de vue en imagerie cardiaque [**75**][**86, 87**]. Les saturations très séléctives ont aussi été grandement utilisées en imagerie spectroscopique [**88**]. On trouvera dans l'appendice de l'article [**75**] la description succincte mais sans doute suffisante de l'algorithme *RIF* moindres carrés pondérés. Cependant, l'utilisation de celui-ci est obsolète comme démontré par le travail récent [**76**] [**77**] qui utilise le nouvel algorithme Remez à valeurs complexes [**66**].

On peut par cette technique générer, et surtout émettre sans distorsion, des impulsions ayant des produits *BT* très grands. Par exemple on trouve dans [**75**] des *BT* de 40 ou même 80. On cherchait en effet à saturer un champ de vue de 40 cm tout en ayant une bande de transition de 5mm. Cependant on génére alors une déposition d'énergie qui devient aussi importante que celle de la plus énergétique des séquences d'acquisition, le spin-écho rapide. Aussi trouve-on de plus en plus, dans le cas de sélection d'un volume, une sélection hybride composée d'une sélection positive (ou 'in-volume') réalisée à l'aide des impulsions de bascule ou de refocalisation et d'une sélection négative (ou 'out-volume') réalisée par saturation [**89, 90**]. La sélection positive est comme d'habitude très moyenne avec des *BT* de 4 à 6, soit des selectivités de l'ordre de deux à trois, de par les contraintes de temps imposées par la séquence d'imagerie. Cependant la ou les saturations, s'étendant uniquement dans les bandes de transition de la sélection positive et donc ayant une énergie très raisonnable, peuvent avoir des produits *BT* de l'ordre de la dizaine ou vingtaine. La sélectivité apparente est donc à nouveau de 20 à 40 mais avec une déposition de l'ordre de celle générée par quelques impulsions de bascule à 90° de faible largeur de bande .

5. Conclusion

On notera que les deux dernières citations sont tirées du congrès de l'*ISMRM* (International Society of Magnetic Resonance in Medecine) de l'année 2006, prouvant que l'algorithme vieux maintenant d'une vingtaine d'années est encore utilisé et résoud de nouveaux problèmes ; il fait l'objet ou est utilisé par plus de la moitié des présentations concernant la conception d'impulsions radiofréquence de ce congrès, et est cité par ailleurs de nombreuses fois dans des présentations plus applicatives. L'autre grande technique qu'il est nécessaire de connaitre en pratique est la conception d'impulsions adiabatiques, qui fait l'objet de la plupart des autres présentations du congrès. Un très bon article de revue de cette technique est paru récemment [**91**], aussi renvoyons nous le lecteur à celui-ci. Nous aurons d'ailleurs à utiliser succinctement le principe d'adiabaticité [**1**] au chapitre suivant.

La suite des choix effectués dans *SLR*, approximation par train d'impulsion dures, représentation par spineur, introduction de la variable Z, reconnaissance de la précense de filtres *RIF* a et b, determination de a à partir de b, sont des décisions en apparence anodines qui aboutissent à une suite d'opérations assez simples. C'est sans doute cette facilité qui fait la force de l'algorithme. On notera aussi avec quelque intérêt que le formalisme obtenu est proche du problème de conception de bancs de filtres complémentaires en puissance utilisés en communication. Et il est normal que l'équivalent du brevet de 1986 [**34**] ait été redécouvert en majeure partie dans le contexte de ces filtres [**92**], une ou deux années plus tard.

6. Appendice

6.1. Simulation d'un train par recursion rétrograde. Etant donné alors un train de $n+1$ impulsions $i=0\ldots n$ on peut s'amuser à combiner les rotations en sens rétrograde en définissant le quaternion résultant de la séquence d'opérations débutant "après l'impulsion i" et se terminant "après l'impulsion n".

$$Q'_{n,i} = Q_n Q'_z Q_{n-1} Q'_z \cdots Q_{i+1} Q'_z Q_i. \tag{205}$$

En notant $Q'_{n,i}$ la matrice

$$Q_{n,i} = \begin{bmatrix} a_i & -b_i^R \\ b_i & a_i^R \end{bmatrix}, \tag{206}$$

où, pour alléger l'écriture on a gardé muet l'indice de fin de la séquence, (n) dans l'écriture des polynômes. Il est immédiat d'écrire la recursion rétrograde matricielle suivante,

$$\begin{bmatrix} a_{i-1} & -b_{i-1}^R \\ b_{i-1} & a_{i-1}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & -b_i^R \\ b_i & a_i^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i-1} & -s_{i-1} \\ s_{i-1} & c_{i-1} \end{bmatrix}. \tag{207}$$

Ce que l'on peut encore une fois mettre sous forme d'une récursion polynomiale en se basant uniquement sur la première colonne (l'égalité des deuxièmes colonnes étant alors automatiquement réalisée)

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= c_{i-1}a_i - s_{i-1}Z^{-1}b_i^R \\ b_{i-1} &= c_{i-1}b_i - s_{i-1}Z^{-1}a_i^R. \end{aligned} \tag{208}$$

La condition initiale, pour $i=n$, étant $\{a_n = c_n, b_n = s_n\}$. A priori la récursion rétrograde ne présente pas plus d'intérêt que la recursion antérograde, mais elle est donnée ici pour mémoire.

CHAPITRE 3

Séquences Formées d'un long Train d'Impulsions Identiques.

Ce chapitre correspond à un travail récent, effectué dans le temps de cette thèse. Il fournit un modèle simple du comportement de l'aimantation durant un long train d'impulsions constantes. Ce train d'impulsion est utilisé, tout ou moins en imagerie RMN, sous deux formes : un train SSFP (*Steady State Free Precession)* où le signal est recueilli sous forme d'un écho de gradient, et où donc naturellement, en RMN classique, les signaux sont des signaux de précession libre, ou au contraire sous forme d'échos de spin déclenchés par des impulsions de refocalisation. Dans ce deuxième cas le train est précédé d'une impulsion de préparation qui bascule l'aimantation dans le plan transverse (voir figure (1)). A part cette préparation il n'y a pas de différence fondamentale dans les équations décrivant les deux séquences. L'article[**93**] avait d'ailleurs entre autres buts le désir de montrer l'équivalence des deux séquences. Cette question était dans l'air du temps [**94**] et était devenue évidente à se poser, sinon à résoudre, à partir du moment où en imagerie on avait commencé à utiliser la méthode *SSFP* sous forme non déphasée c'est-à-dire telle que l'intégrale des gradients entre deux impulsions y était rendue nulle [**95, 96, 97, 98**]. La séquence *SSFP* est alors très symétrique autour du milieu de la période de lecture et est semblable à la séquence d'imagerie Fast Spin Echo ou *RARE* [**99, 100**] *,* que l'on préférera appeler ici *CPMG,* pour Carr Purcell Meiboom Gill [**101**] avec un point d'écho situé à mi chemin entre deux impulsions. Il est alors aussi naturel d'écrire les équations d'écho à écho, même dans le cas de la *SSFP* en se plaçant au milieu de la période de déphasage. Or ceci n'est pas la règle pour l'analyse de ce type de séquence *SSFP* en résonance magnétique classique où le cycle élémentaire de la séquence est examiné de fin d'impulsion à fin d'impulsion ; l'intérêt de la présente approche est qu'en pratique tout peut se visualiser dans un même plan à deux dimensions et non dans un espace à trois dimensions.

Cependant le véritable but de l'article [**93**] était la stabilisation des signaux des séquences *SSFP* et plus particulièrement de la *SSFP* rephasée qui a tendance à osciller fortement et pendant assez longtemps après une mise en route brutale du train. Mais comme cette introduction le laisse entrevoir, le contenu de l'article embrasse des notions beaucoup plus générales et donne un modèle simplifié de la génération des signaux mais aussi des relaxations pendant les trains *SSFP* ou *CPMG.* Par ailleurs la notion introduite de modulation lente, 'adiabatique', du train d'impulsions est applicable à la *SSFP* ou au train d'écho *CPMG.* C'est pourquoi, à l'inverse de l'article, l'emphase sera mis ici sur le modèle général de rotation et de relaxation et pour faire équilibre à l'article les applications seront orientées vers les séquences *CPMG*. Par ailleurs la liaison avec des travaux plus anciens [**102**] [**103**] concernant la stabilisation de *CPMG* sera faite. On notera cependant que l'apport le plus significatif du travail est sans doute l'obtention d'équations très simplifiées des processus de relaxation en *SSFP* ou *CPMG*.

1. Modèles Simples du Signal SSFP ou CPMG

1.1. La rotation d'écho à écho. En se référant à la figure (1) qui décrit de façon succinctes les deux séquences, on peut admettre qu'elle sont identiques et ne diffèrent que par leur mise en conditions initiales. La figure (1) décrit volontairement les séquences simples

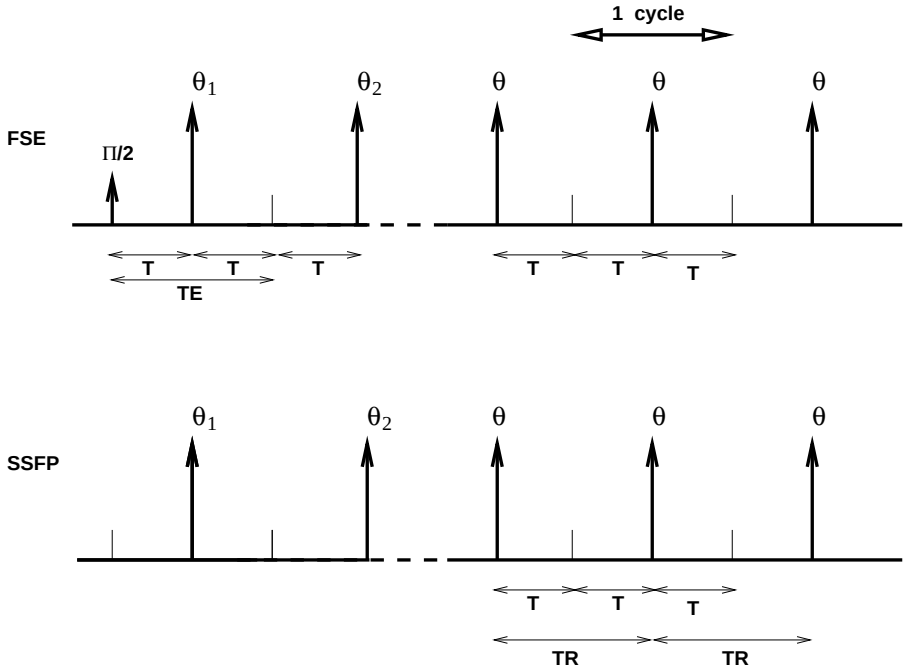

FIG. 1. Les deux types de séquence considérées dans ce chapitre sont la *SSFP,* en bas, ou le train d'échos de spin *CPMG* , ou FSE, en haut. Elle sont constituées d'un train d'impulsions constantes séparées par un intervalle de temps $2T$ pendant lesquelles n'agit que la précession libre ou la précession due à des gradients d'imagerie qui alors ont une intégrale temporelle constante $2\vec{K}$. La seule différence entre les deux séquences est la présence d'une impulsion de bascule à $\pi/2$, à un intervalle de temps T avant le début du train dans le cas de la séquence *CPMG*. On pourra être amené pour stabiliser le signal à moduler l'amplitude des premières impulsions du train. Par convention, dans ce chapitre et les suivants, nous appelons la position de l'impulsion de bascule de la séquence *CPMG*, l'écho 0, la première impulsion de refocalisation est θ_1 et l'écho 1 est à mi distance entre $\theta_1$et θ_2 etc.. Les valeurs à l'écho, comme par exemple l'aimantation transverse, est notée avec l'index de l'écho $M_{xy}(i)$; sa valeur juste avant l'impulsion i sera notée $M_{xy}^{-}(i)$ et sa valeur juste après l'impulsion i sera notée $M_{xy}^{+}(i)$.

de type spectroscopie *RMN* où n'intervient, entre les impulsions, que la pulsation de résonance ω. Ainsi entre le milieu d'un intervalle qu'on nommera 'écho' et l'impulsion suivante, un élément d'aimantation subit, en négligeant dans un premier temps les effets de la relaxation, une précession d'angle $-\omega T$. L'impulsion *RF* fait subir à l'aimantation une nutation, qu'on peut toujours par changement de repère, supposer être une nutation d'angle θ le long de l'axe $\vec{x}$ du repère tournant. Dans tous les cas, et même si l'impulsion *RF* est sélective, on peut la supposer dure simplement en considérant séparément des tranches infiniment petites $z, z+dz$ du profil de coupe ; les éventuelles précessions qui représentent les phases des polynômes $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ du chapitre précédent peuvent être incluses dans les périodes de précessions, et on ne conserve alors que la nutation centrale $\theta(z) = 2\arcsin|\beta(z)|$. Après l'impulsion et jusqu'à l'écho suivant, l'aimantation subit de nouveau la précession $-\omega T$.

Donc, et toujours en négligeant les relaxations l'opération subit par l'aimantation d'écho en écho est une rotation qu'on peut écrire symboliquement :

$$R = R_z(-\omega T)R_x(\theta)R_z(-\omega T). \tag{209}$$

Dans le cas de l'*IRM* et de la présence de gradients dynamiques, l'angle de précession $-\varphi$ subi par l'aimantation au point géométrique $\vec{X}$, entre une impulsion *RF* et l'écho suivant, peut toujours s'écrire

$$\varphi = -\gamma \int_0^T \vec{X} \cdot \vec{g}(t)\mathrm{d}t = -\vec{K}\vec{X} = -\omega T. \tag{210}$$

C'est-à-dire qu'on peut toujours définir une pulsation 'moyenne' ω, on se ramène ainsi au cas de la spectroscopie. Dans le contexte de l'imagerie, on peut aussi par la même occasion définir un vecteur d'onde de déphasage (ou d'écrasage) $\vec{K}$. Mais cette notion ne sera pas utilisée dans ce chapitre essentiellement mono dimensionnel (le long de la direction de $\vec{K}$), par contre on parlera de volume ou de tranche d'écrasage. Cette tranche a comme épaisseur la valeur d'une longueur d'onde et correspond à une variation de phase φ de 2π. Dans les imageries classiques de type dispersé, on s'arrange pour que cette longueur d'onde soit petite par rapport à la résolution spatiale la plus faible, assurant ainsi un niveau de gris homogène. Dans le cas de la *SSFP* rephasée (ou*TrueFISP* [**95**]) l'intégrale des gradient est rendue volontairement nulle. Cependant il ne faut pas oublier l'hétérogénéité du champ central ΔB_0 qui peut introduire alors un phénomène de modulation de niveau de gris ("banding") dans l'image.

Revenant donc à la séquence simple de spectroscopie, la rotation (209) peut être caractérisée par un axe de rotation et un angle de nutation. Ceci est excessivement facile en utilisant l'outil spineur et nos discussions du chapitre 1 : à ce titre, on comparera ce qui suit à la dérivation de l'article de David Alsop [**103**]. Les résultats, malgré les apparences sont identiques, si on fait intervenir les relations trigonométriques classiques, mais l'approche spineur trouve directement le résultat simple et en quelques lignes, comme nous le faisons maintenant.

La matrice quaternion représentant la rotation (209) est immédiatement trouvée par multiplication des trois matrices quaternions correspondantes. On obtient

$$Q = \begin{bmatrix} cZ & -js \\ -js & cZ^{-1} \end{bmatrix}, \tag{211}$$

avec les notations maintenant usuelles $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$, $Z = \exp(j\omega T)$. On met cette matrice sous la forme (9) permettant d'isoler l'axe de la rotation (simplement en isolant la partie réelle de α)

$$Q = c\cos\omega T - j\begin{bmatrix} -c\sin\omega T & s \\ s & c\sin\omega T \end{bmatrix}. \tag{212}$$

En normalisant la matrice vecteur, on obtient

$$Q = c\cos\omega T - j\sqrt{s^2 + c^2\sin^2\omega T}\begin{bmatrix} n_z & n_x \\ n_x & -n_z \end{bmatrix} = \cos\frac{\Omega}{2} - j\sin\frac{\Omega}{2}(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z) \tag{213}$$

avec les composantes du vecteur axe :

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ -c\sin\omega T \end{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2 + c^2\sin^2\omega T}}. \tag{214}$$

Le facteur ε est un signe arbitrairement choisi $\varepsilon = \pm 1$.

Par identification avec (9) on trouve aussi que l'angle de rotation Ω est donné par

$$\cos\frac{\Omega}{2} = c\cos\omega T, \tag{215}$$

et

$$\sin\frac{\Omega}{2} = \varepsilon\sqrt{s^2 + c^2\sin^2\omega T} = \varepsilon\sqrt{1 - c^2\cos^2\omega T}. \tag{216}$$

Les deux équations (215),(216) déterminent Ω. Il y a cependant toujours la possibilité de changer le signe de Ω en changeant simultanément le signe du vecteur $\vec{n}$ grâce à ε. Cela conduit, par exemple, aux deux représentations possibles en éventail ou en papillon. Dans la représentation éventail, voir figure (2), qu'on doit préférer lorsqu'on privilégie l'aspect mathématique plus que l'intuition physique, on conserve la continuité de Ω en fonction de ω. Elle est obtenue directement en résolvant (215) par

$$\Omega = 2\arccos(c\cos\omega T), \tag{217}$$

avec la détermination classique de arccos. Alors $\sin\Omega/2$ est positif et c'est la détermination $\varepsilon = 1$ qu'on doit prendre pour l'axe de rotation (214). Ω varie alors de $\Omega = \theta$ quand $\omega = 0$, à $2\pi - \theta$ quand $\omega = -\pi$, avec une valeur 'moyenne' de $\Omega = \pi$, d'ailleurs atteinte pour $\omega = \pm\pi/2$. Voir figure (2) en bas à gauche. Les composantes n_x, n_z sont représentées dans la ligne du haut de cette même figure et on remarque que n_x est toujours positif. Une représentation graphique de l'axe de rotation dans l'espace est tentée sur l'écusson en bas à droite, partie gauche. On note que la même posisition de l'axe est atteinte deux fois mais pour des angles de rotation opposés, ou plus précisément avec des angles de rotations ayant

comme demi somme π, soit Ω et $2\pi - \Omega$ (et ceci correspond à deux pulsations de résonance symmétriques autour de $\omega = \pi/2$ ou $\omega = -\pi/2$).

Un angle de rotation variant autour π n'étant pas très physique, on préférera sans doute la représentation en papillon où on conserve un angle Ω toujours positif (de θ à $+\pi$) en changeant le signe de l'axe au passage à $\Omega = \pi$ qui se produit en $\omega = \pm\pi/2$. Cette représentation est donnée en figure (2) sur l'écusson en bas à droite, partie droite. Elle est un peu plus proche de l'image mentale qu'on peut avoir quand on remplace la suite des trois opérations discrètes, précession d'angle ωT, nutation θ, précession ωT, par une rotation continue de champ efficace. Ce champ aurait comme cordonnées en x, z, la valeur moyenne temporelle des rotations sur chaque axe, c'est à dire $\theta/2T$ sur $\vec{x}$ d'une part et ω autour de $\vec{z}$ d'autre part. Il y a alors adéquation quasi parfaite entre l'image du champ efficace moyen et des équations discrètes. L'adéquation est parfaite autour de $\omega = 0$ mais les deux ensembles d'équations divergent quand $\omega T \to \pm\pi/2$, cependant pas de façon dramatique. Par ailleurs, pour les précessions supérieures à $|\omega T| > \pi/2$ et encadrant la valeur $\omega T = \pi$, c'est-à-dire le segment $\pi/2 < \omega T < 3\pi/2$, le modèle continu équivalent doit être changé de signe avec un champ efficace dont les projections sur les axes sont $-\theta/2T$ le long de x et $-\omega$ le long de z. Mais justement, revenant au cas discret, il faut remarquer que pour une précession discrète $\omega T = \pi$, représentative de la plage incriminée, la suite des opérations précession par π, nutation par θ, précession par π est équivalente à une simple nutation par $-\theta$. Il y a donc bien deux plages de pulsations, l'une centrée en $\omega = 0$, l'autre centrée en $\omega = \pi$, avec un changement de signe entre les deux, ce que la représentation en papillon permet de visualiser. Ainsi coupée en deux bandes de fréquence de résonance, il n'y a pas de différences qualitatives entre la succession discrète de précession, nutation, précession, et une *RF* continue ; il n'y a plus que des différences mineures aux alentours de $\omega T = \pm\pi/2$.

1.2. Équilibres dynamiques sans relaxation. La figure (3) montre la simulation des signaux au temps des échos, intégrale des aimantations transverses sur un intervalle ωT variant de 0 à 2π, d'une séquence *CPMG*, et ceci pour différents angles de nutation θ du train de refocalisation. La première série de courbes correspond à une aimantation transversale initiale, de valeur constante arbitraire, 1, à l'écho zéro, positionnée le long de l'axe $\vec{x}$. On voit que rapidement le signal se stabilise vers une constante non négligeable : par exemple on obtient la moitié du signal maximum même lorsque la nutation utilisée n'est plus que de 60° au lieu des 180° nominaux. C'est la condition Carr-Pucell [**101**] (et sa modification Meiboom Gill). [1]

Ce qui est cependant souvent peu compris, ou réalisé, est la conséquence du principe même de Carr-Purcell-Meiboom-Gill : lorsque l'aimantation initiale est en quadrature avec l'axe de la *RF*, le long de $\vec{y}$ dans notre cas, le signal s'éteint au contraire rapidement. Ceci

[1] Dans CP, les impulsions de refocalisation sont à phase constante et l'aimantation initiale doit être le long de leur axe ; dans MG cette aimantation initiale doit être perpendiculaire à un train de RF dont le signe est alterné. Il est facile de réaliser que MG n'est autre que CP vue dans un repère tournant légèrement décalé, faisant $1/4$ de tour entre l'écho et l'impulsion. Il présentait l'intérêt pratique cependant de ne pas nécessiter de rotation de phase de la *RF*.

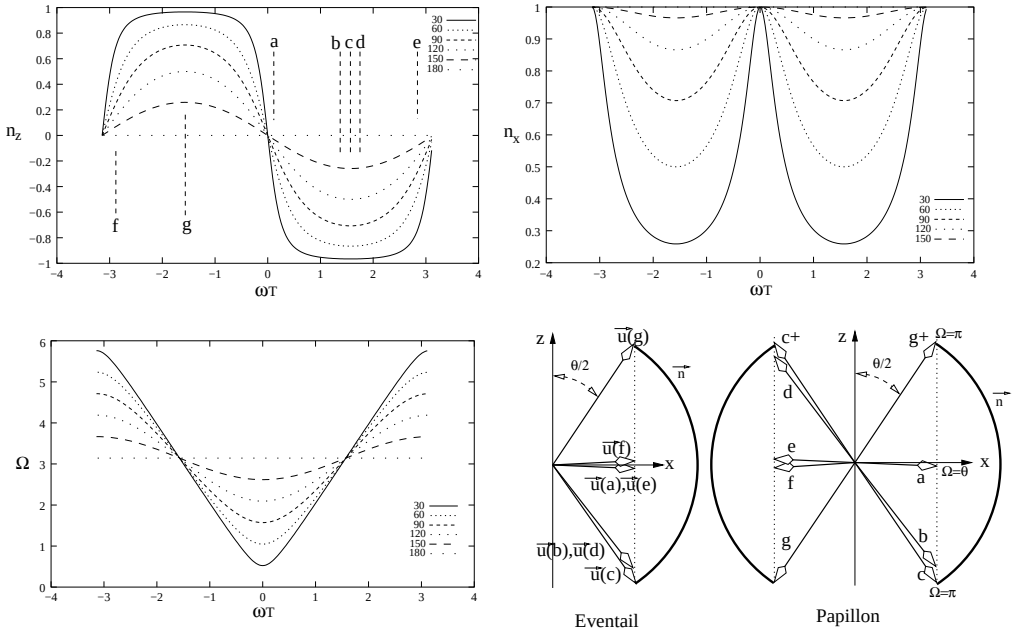

FIG. 2. Sur la ligne supérieure sont représentées les composantes n_x, $n_z$du vecteur rotation pour différents angles de nutation. Une représentation graphique, en éventail, en est donnée dans l'écusson en bas à droite, pour θ de l'ordre de $\pi/3$, avec les lettres a à g utilisées comme repères. Le modèle d'excitation continue (voir texte) est mieux montré par le diagramme équivalent de type papillon, en bas à l'extrême droite : simplement on impose à l'angle de rotation Ω d'être toujours positif inférieur à π, en changeant lorsque c'est nécessaire le sens de l'axe de rotation.

est montré sur l'ensemble de courbes du bas de la figure (3). Il n'y a que dans le cas où l'impulsion est très exactement 180° que le signal oscille de $+1$ à -1 le long de l'axe $\vec{y}$; pour rendre la figure lisible, cette oscillation à la fréquence $\Omega = \pi$ a été démodulée de tous les signaux. En première approximation, on pourrait dire que l'amplitude du signal oscille avec une pulsation de l'ordre de $\pi - \theta$ avec un temps de relaxation, ou plutôt de dispersion proportionnel à $\pi - \theta$ correspondant à quelques périodes de l'oscillation. En tout état de cause, même de faibles erreurs de nutation rendent impossible l'imagerie de la composante en quadrature : ainsi pour une nutation de 150° le signal n'est utilisable que sur moins de cinq échos. Il est donc important de réaliser qu'une séquence d'impulsions *CPMG* n'est pas l'équivalent d'un écho de spin classique qu'on répéterait indéfiniment : cette image n'est vraie que pour une composante de l'aimantation initiale, pas pour l'autre. Ce sera justement l'objet du dernier chapitre que d'essayer de contourner cette limitation.

Les résultats de la figure (3) s'expliquent facilement à l'aide de la figure (4), où on reprend le diagramme en éventail de la figure (2). On y a supposé l'aimantation initiale M_0 positionnée le long de l'axe $\vec{x}$, quelle que soit la pulsation de résonance ω, comme juste après une impulsion de bascule dure à 90°_y. Alors pour chaque pulsation de résonance, ω, on calcule l'axe de la rotation $\vec{n}(\omega)$ et on décompose l'aimantation initiale M_0 en une partie parallèle à l'axe, $\vec{m}_\parallel$, et une partie perpendiculaire, $\vec{m}_\perp$. Par définition la composante

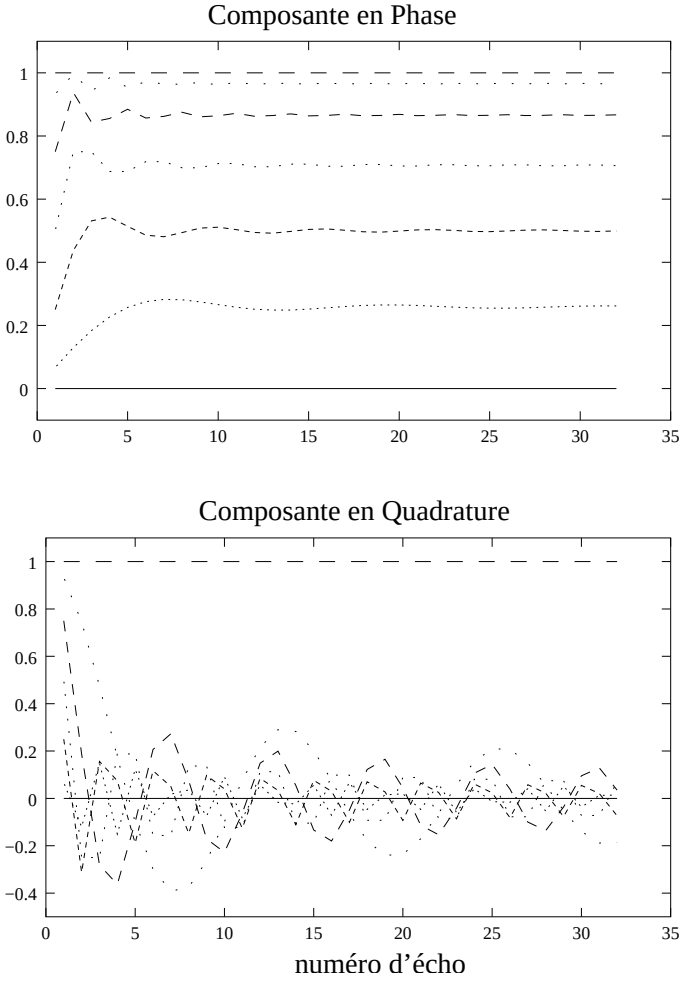

FIG. 3. Simulation des signaux recueillis lors d'une séquence *CPMG* pour différents angles de nutation ($\pi/6$,$\pi/3$,$\pi/2$,$2\pi/3$,$5\pi/6$,π). Sur la figure du haut la condition *CPMG* est respectée et l'aimantation originelle à l'écho zéro est le long de l'axe $\vec{x}$ des émissions radio fréquences. Sur la figure du bas au contraire l'aimantation est en quadrature avec l'axe des impulsions de refocalisation.

$\vec{m}_{\|}$reste inchangée pendant la rotation. Il est alors facile de calculer l'intégrale, sur ω, de sa projection dans le plan $\vec{x},\vec{y}$. La projection de $\vec{M}_0 = \vec{x}$ sur $\vec{n}$ est $\vec{m}_{\|} = (\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n}$ et la projection de celle-ci sur l'axe $\vec{x}$ est $(\vec{x}\cdot\vec{m}_{\|})\vec{x}$, soit tout calcul fait $(\vec{n}\cdot\vec{x})^2\vec{x}$ et le signal généré par une bande de pulsation $\mathrm{d}\omega$ est donc $\mathrm{d}\vec{S} = n_x^2(\omega)\mathrm{d}\omega\vec{x}$, avec n_x donné par (214). En intégrant sur toutes les pulsations, on trouve l'amplitude du signal constant le long de l'axe $\vec{x}$ par

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} n_x^2(\omega)\mathrm{d}(\omega T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{s^2}{s^2+c^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi, \tag{218}$$

où on a posé $\varphi = \omega T$.

Après quelques manipulations détaillées dans l'annexe du présent chapitre on obtient

$$S = \sin\frac{\theta}{2} \tag{219}$$

Ce résultat a été établi de longue date [**99, 104**] par simulation et expérimentation mais à ma connaissance n'a pas été démontré de façon simple (certes une démonstration est trouvée dans [**103**], mais avec des expressions tellement compliquées qu'elle en perd sa portée). Dans [**93**], se trouve l'oubli d'un facteur 2π à un moment de la démonstration, oubli corrigé ici.

Quand à la composante perpendiculaire $\vec{m}_\perp(\omega)$ elle va rester perpendiculaire à l'axe $\vec{n}(\omega)$ mais, dans ce plan perpendiculaire, va entamer un mouvement de rotation avec l'angle de rotation $\Omega(\omega)$. Il est sans doute possible de faire la sommation des aimantations élémentaires et en particulier de leurs composantes dans le plan x, y mais il suffira ici de remarquer que les rotations propres $\Omega(\omega)$ de ces systèmes oscillants du second ordre forment un continuum entourant $\Omega = \pi$ en s'étalant dans une plage de largeur $2\pi - 2\theta$ (de $\Omega = \theta$ à $\Omega = -\theta$ en passant par π, voir figure (2)). Aussi, à part une petite accumulation autour de $\Omega = \theta$ et $\Omega = -\theta$, la répartition des angles de rotation Ω est de densité quasi constante : en effet la pente de $\Omega(\omega)$ est quasi constante atour de $\Omega = \pi$. Enfin, la symétrie autour de $\omega = 0$ (ou autour $\omega = \pi$), avec des pulsations Ω identiques et des conditions initiales en z opposées permet d'affirmer que la composante globale du signal oscillant n'a qu'une composante x. En conclusion, on peut s'attendre à ce que le signal résultant de l'ensemble des composantes perpendiculaires, pour une condition initiale de l'aimantation respectant la condition *CPMG*, soit un signal de type sinus cardinal. C'est effectivement ce qu'on observe sur la figure (3) en haut.

Le même raisonnement peut être tenu dans le cas de la condition initiale M_0 le long de l'axe $\vec{y}$, mais dans ce cas la projection sur l'axe de rotation local $\vec{n}(\omega)$ est simplement nulle, et il n'y aura donc qu'une composante oscillatoire générée par la *projetante* originellement positionnée le long de y et qui à nouveau entame un mouvement de rotation autour de l'axe, avec des incréments d'angles $\Omega(\omega)$ très dispersés de façon presque equirépartie dans une plage $2(\pi - \theta)$. On aura donc une décroissance du signal vers zéro de type sinus cardinal et avec une pulsation caractéristique de l'ordre de $(\pi - \theta)/2T$, ce qui encore une fois est approximativement ce qu'on observe en bas de la figure (3) .

Il y a donc stabilisation naturelle par *dispersion de phase* due à un étalement des fréquences $\Omega/2T$ de rotation dans le volume d'écrasage.

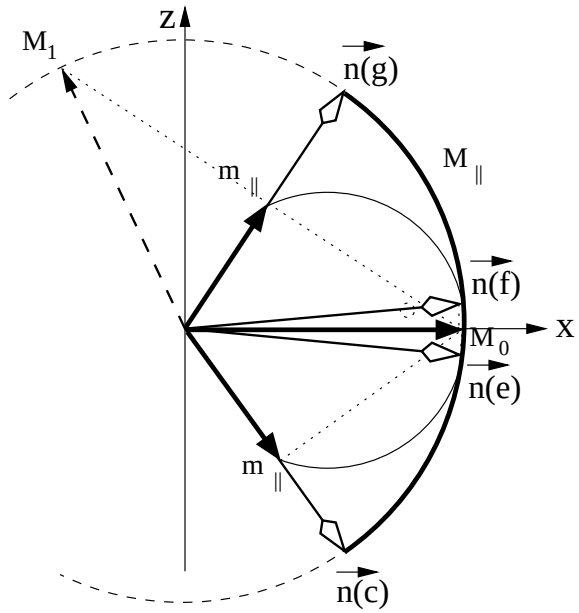

FIG. 4. Pour chaque pulsation de résonance ω, on peut décomposer l'aimantation originale M_0 en une composante parallèle à l'axe de rotation local $\vec{n}(\omega)$ et en une composante perpendiculaire. Par définition la composante parallèle $\vec{m}_{\|}$ reste constante alors que la composante perpendiculaire, présentée en pointillés fin, entame une rotation d'angle Ω entre chaque écho. Étant donné la très large dispersion des valeurs de Ω, en pratique dans une bande de largeur $2(\pi-\theta)$ voir figure (2) en bas à gauche, la somme de leurs composantes tend à s'annuler rapidement, sauf peut-être pour les éléments d'aimantation situés près de la pulsation 0 ou $\omega T = \pi$ (point a, et points entre e et f de la figure (2)) où l'angle de rotation est quasi constant. Mais c'est justement à ces valeurs de pulsations que la composante perpendiculaire est très faible. Ceci explique la mise en équilibre dynamique naturellement rapide de la séquence *CPMG*, au contraire de la séquence *SSFP*, voir la figure (6)

Comme montré dans l'article [**93**] un dessin similaire peut être exécuté dans le cas de la *SSFP*, avec cette fois l'aimantation initiale le long de l'axe $\vec{z}$. Encore une fois les composantes perpendiculaires aux axes de rotation se dispersent, ne laissant que les composantes parallèles, statiques, et qui créent la partie constante du signal. Par symétrie entre $\omega T = \varphi$ et $\omega T = \varphi + \pi$ on trouve que ce signal constant est nul au temps d'écho dans une *SSFP* classique. Cependant en suivant l'évolution après l'écho sous forme du déphasage supplémentaire, on pourrait calculer le signal cette fois-ci non nul juste avant les impulsions (et aussi juste après l'impulsion). On trouve alors expérimentalement ou par simulation que le signal oscillatoire ne s'éteint pas aussi naturellement que dans le cas de la séquence de spin écho.

C'est ce qui est montré par les résultats de simulation de la figure (5). On peut en trouver l'explication à partir de notre simple modèle de rotation d'écho à écho, voir la figure (6).

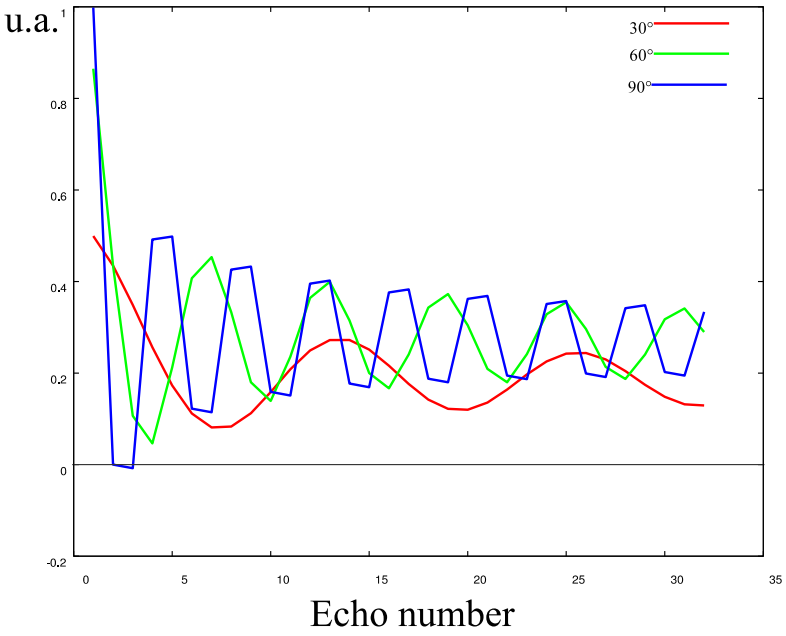

FIG. 5. Simulation du signal SSFP, à impulsions constantes, (signal de *FID*, juste après l'impulsion RF) pendant les trente deux premiers intervalles inter impulsions. Cet intervalle est ici de 5ms et dans un souci de réalisme,un processus de relaxation avec $T_2 = T_1 = 2s$ a été également simulé, mais sans influence notable évidemment sur les quelque 150ms du tracé. Les angles de nutation θ sont pour les trois courbes respectivement de $\pi/6$,$\pi/3$,$\pi/2$. On note une longue oscillation résiduelle autour d'un fréquence radiale de θ par intervalle. Les angles de nutation au dessus de 90° n'ont pas été tracés dans un souci de clarté, l'oscillation étant de plus en plus élevée en fréquence et amplitude, le signal moyen diminuant également. L'explication à partir du modèle de rotation d'écho à écho est en figure (6).

Dans le cas de la *SSFP* le signal parasite oscillatoire provient des régions de pulsations de résonance $\omega T = 0$ ou π car c'est là que la projetante est d'amplitude la plus grande, c'est à dire les points autour de a et e, f sur la figure (2). Or à ces valeurs de la pulsation, les rotations propres Ω forment un paquet très peu dispersif autour de la valeur θ : pour s'en convaincre il faut se reporter aux courbes de l'angle de rotation $\Omega(\omega T)$ en figure (2). Autour des points a ou e et f la courbe $\Omega(\omega T)$ est une parabole et l'oscillation se maintiendra donc très longtemps avec une fondamentale assez bien définie et peu relaxée, ayant une pulsation de θ par intervalle $2T$. Ce qui est effectivement observé sur la figure (5).

Ce régime oscillatoire peut aussi apparaître dans le cas de la *SSFP* refocalisée, encore appelée *BSSFP* où *B* signifie 'balancée', ou sous le nom commercial *TrueFisp*. Si une aimantation parasite se trouve à la pulsation $\omega T = 0$ ou π, alors qu'on pense être calé comme on doit l'être dans *TrueFisp* sur une fréquence $\omega T = \pm\pi/2$ (point c ou g), le signal oscillatoire correspondant, à la pulsation de rotation $\theta/2T$, se déclenche. Or il suffit pour cela de ne pas avoir une homogénéité de champ central suffisante. On notera d'ailleurs qu'à 1.5

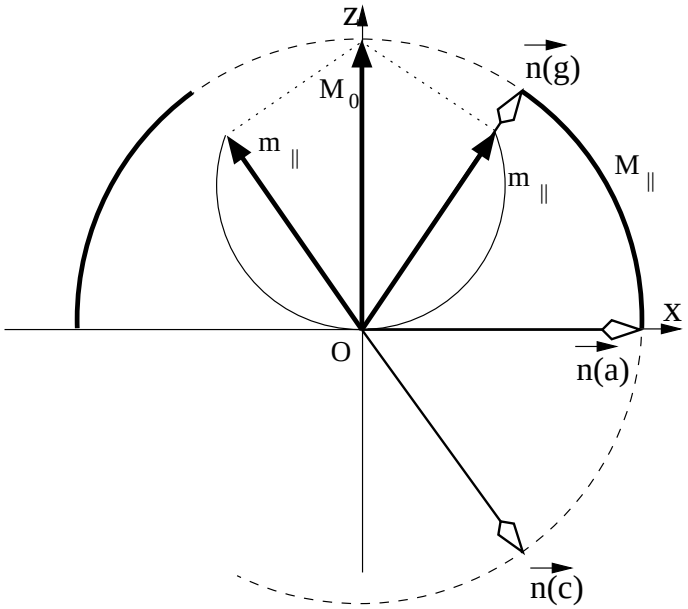

FIG. 6. Cette figure est similaire à la figure (4) mais concerne la *SSFP*. L'aimantation est originellement le long de $\vec{z}$. On note que cette fois-ci la grande majorité du signal est généré par les pulsations $\omega T = \pm\pi/2$ c'est à dire les points autour de *c* et *g* sur la figure (2), la composante parallèle étant nulle autour des points *a*, *e*, *f*. Cependant pour ces derniers points, la composante perpendiculaire est au contraire maximale, mais surtout l'angle de rotation prope Ω y est de valeur proche de θ et est très peu dispersé. Les régions autour de $\omega T = 0$ et $\omega T = \pi$ créent donc très peu de signal utile mais un fort signal parasite oscillant à une fréquence angulaire proche de $\theta/2T$ et de durée très longue. Ce qu'on peut vérifier sur les résultats de simulation de la figure (5).

teslas la différence de pulsation de résonance entre l'eau et la graisse correspond approximativement à $\omega T = \pi/2$ pour intervalle entre deux impulsions $2T$ de $5ms$. Ceci explique la course à l'obtention d'intervalles inter-écho de l'ordre de $2.5ms$ par augmentation de la puissance des gradients. Comme on peut en juger cette course fut réussie ... jusqu'à l'arrivée du 3 teslas. Il faudrait maintenant arriver à des intervalles inter-écho de 1.25ms ! On peut prédire que la montée à 7 teslas et au dessus va certainement amener un retour des séquences d'imagerie non refocalisée comme *SSFP* ou *CPMG*.

2. Mises en équilibre actives

En attendant, c'est pour tenter de résoudre ce problème de stabilité de *BSSFP* que mon article [**93**], à la suite du travail [**105**] s'attaquait à la mise en équilibre rapide de la séquence *TrueFISP*. Il montre qu'on peut, pour ce faire, se reposer sur un principe d'adiabaticité pour ne pas déclencher de signaux oscillatoires et par ailleurs maximiser le signal constant. En fait, et a posteriori, cette mise en équilibre est loin d'être suffisante dans le cas de la *SSFP* non refocalisée car la stabilisation n'est effective que dans les régions autour des points

c et *g* ! Si on veut se garantir de tout signal oscillant venant des régions *a* ou *e* et *f*, le seul moyen pour l'instant est, comme proposé récemment [**106**], de détruire par saturation préalable l'aimantation des régions incriminées avant d'appliquer la rampe Kaiser-Bessel proposée dans [**93**] .

Cependant le principe de rampe lente adiabatique ou semi-adiabatique est au contraire très applicable à la séquence *CPMG* et peut permettre d'expliquer simplement des résultats antérieurs concernant la stabilisation de Fast Spin Echo [**102**][**103**]. Je me propose de rappeler dans cette section suivante ces techniques de stabilisation. En commençant par le principe directeur, cependant non applicable en pratique.

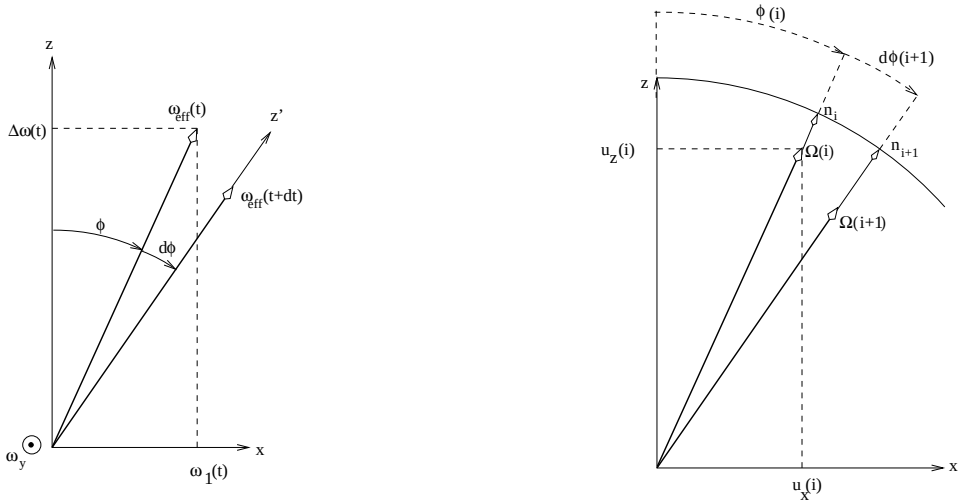

FIG. 7. On peut copier le principe de balayage adiabatique, en le rendant discret, à droite. Ici on a représenté l'axe $\vec{n}_i$ de la rotation entre l'écho $i-1$ et l'écho i d'une part, et l'axe $\vec{n}_{i+1}$ entre l'écho i et l'écho $i+1$. De plus on a représenté par un vecteur de longueur variable Ω_i, puis Ω_{i-1} l'angle de la rotation. L'équivalent du principe adiabatique continu est que la variation d'angle entre les axes $\vec{n}_i$ e t $\vec{n}_{i+1}$ soit ici, $\mathrm{d}\phi_{i+1} = \phi_{i+1} - \phi_i$, soit faible en regard de la rotation Ω_i ou Ω_{i+1}.

2.1. Mise en équilibre adiabatique. Hargreaves [**105**] a proposé pour réduire les oscillations présentes dans la séquence *SSFP* refocalisée d'augmenter à partir de zéro suivant une rampe ascendante, linéaire dans son cas, la nutation des impulsions jusqu'à obtenir l'angle de nutation voulu. On peut tenter de justifier ce résultat par un principe adiabatique calqué sur le raisonnement du cas continu [**1**]. Se référant à la figure (7), on suppose que l'angle $\phi_{i+1} - \phi_i$ séparant deux rotations successives reste *toujours* petit devant l'angle Ω_i de la rotation. Alors une aimantation qui est alignée, par exemple à l'écho zéro, avec l'axe de la rotation $\vec{n}_1$ restera alignée avec l'axe de la rotation lorsque celui-ci variera ; le tout est que cette variation soit lente comparée à la valeur de la rotation 'instantanée'. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que dans les mêmes conditions, une composante qui au départ est perpendiculaire à l'axe de la rotation le reste tout le long du balayage adiabatique. La démonstration se fait de la même façon que dans le cas continu, en se plaçant dans un

repère $\{x',y',z'\}$ dont l'axe $\vec{z}'$ reste aligné avec $\vec{n}$ et l'axe $\vec{y}'$ reste constant aligné avec $\vec{y}$. Alors la rotation du repère par incréménts $\mathrm{d}\phi_{i+1}$, $i=0,1\ldots$, est équivalent dans le repère $\{x',y,z'\}$ à une rotation le long de $\vec{y}$ de valeur $-\mathrm{d}\phi_{i+1}$. Les rotations se combinent sous la forme $\ldots R_y(\mathrm{d}\phi_2)\circ R_{z'}(\Omega_1)\circ R_y(\mathrm{d}\phi_1)$. L'hypothèse adiabatique consiste à supposer que les $\mathrm{d}\phi_{i+1}$sont beaucoup plus petits que les Ω_i avec par exemple

$$\mathrm{d}\phi_i < \frac{1}{10}\Omega_i. \tag{220}$$

Alors on peut admettre que l'aimantation originellement le long de z' ne s'en éloigne pas de plus d'un angle de $1/5$ de radians. En fait on s'aperçoit que le raisonnement a une faille car, contrairement au cas continu, on pourrait admettre que l'axe de la rotation fait des sauts brusques, d'amplitude $d\phi_i$ réduite, mais aux bons moments. Par exemple en faisant un saut après que l'aimantation a tourné de π autour de z', on éloigne petit à petit l'aimantation de l'axe de la rotation 'instantanée'. Mais de toute façon il s'avère que la contrainte adiabatique telle qu'écrite en (220) conduit à des temps de mise en équilibre prohibitifs et nous allons être obligés d'être un peu plus créatifs en admettant des erreurs d'ordre un par rapport à l'adiabaticité pure. Ainsi nous allons admettre que l'aimantation puisse s'éloigner de l'axe z' (ou de $\vec{n}_i$) mais de façon raisonnable tel qu'un modèle du premier ordre, linéaire, reste valide. Cependant on imposera à l'aimantation d'être en concordance avec l'axe de la rotation à la fin de la période de stabilisation et à ce moment seulement (critère terminal). C'est ce que nous entendons par contrainte 'semi-adiabatique'.

2.2. Mise en équilibre semi-adiabatique de la SSFP. Pour cela posons $\Delta_i=\phi_{i+1}-\phi_i$, qui devient un angle de nutation dans le nouveau repère, jouant le rôle de ω_y du principe adiabatique continu (Figure (7) à gauche). Supposons, et ce sera le cas dans tout ce chapitre, qu'on n'utilise que des rampes montantes (dans le cas de la *SSFP*) ou descendantes (dans le cas de *CPMG*) de la nutation θ_i sans variation de phase ou de fréquence centrale.

Par ailleurs disons tout de suite que, au moins pour la *SSFP*, il sera impossible de stabiliser le signal lorsque ω la pulsation de résonance sera trop proche de zéro ou de π. Donc supposons pour simplifier que ω est suffisamment grand pour que n_z soit proche de 1 et qu'alors l'angle ϕ entre l'axe $\vec{z}$ et l'axe de la rotation $\vec{n}$ étant encore assez petit pour qu'on puisse le confondre avec sa tangente qui est $\sin\theta_i/2$, que nous confondons également avec $\theta_i/2$, permettant d'écrire

$$\Delta_i' = \phi_{i+1}-\phi_i \simeq \frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2}. \tag{221}$$

Par ailleurs, dans les mêmes conditions, on approche l'angle de rotation propre (216) par

$$\Omega_i \simeq 2\omega T \tag{222}$$

en négligeant la composante transverse $\theta_i/2$.

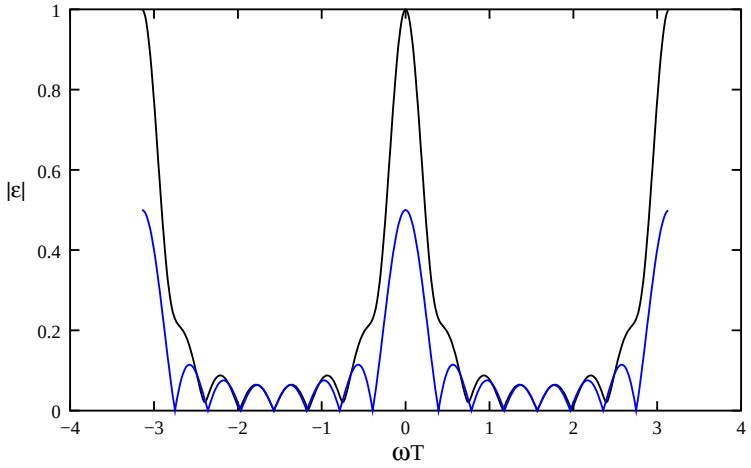

FIG. 8. Comparaison de la composante perpendiculaire après une montée en rampe linéaire de 0 à 1 radian en huit impulsions, dans le cas réel (par simulation en fait) en noir, et par l'approximation linéaire (223) en bleu.

Dans le repère $\{x',y',z'\}$ on est en présence d'un train de nutations variables Δ_i, appliquées le long de $y'=y$. Cependant ces angles sont suffisamment petits pour que la composante de l'aimantation le long de z' reste proche de 1, hypothèse linéaire, et que la composante dans le plan $\{x',y'\}$ reste petite sans être négligeable. Le point essentiel est que cette aimantation 'perpendiculaire' , notée ε_i , soit effectivement négligeable à la fin de la période de préparation ; si cette période de préparation est composée de p impulsions, l'écart de l'aimantation en fin de celle-ci peut s'écrire

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(\theta_{i+1}-\theta_i)\exp(j2\omega iT) \tag{223}$$

où on reconnaît la transformée de Fourier de la différence première des nutations des impulsions *RF*.

Ainsi donc en utilisant une rampe linéaire comme suggéré par Hargreaves *et al.*[**105**], on devrait obtenir une réponse en fréquence ayant la forme d'un sinus cardinal. La figure (8) montre que, malgré les hypothèses simplificatrices, il en est bien ainsi autour des fréquences utiles de la *BSSFP* $\omega=\pm\pi/2$. Bien sur, il y a une forte divergence entre cette théorie simplifiée et la simulation exacte autour de $\omega=0$ ou $\omega=\pi$, mais cela était prévu. On peut alors remarquer qu'à cause de ce sinus cardinal l'erreur par rapport à la position idéale est loin d'être négligeable même autour des fréquences radiales de prédilection de la *BSSFP*, $\omega=\pm\pi/2$. Une idée simple et évidente pour améliorer la proposition de Hargreaves *et al.* est de remplacer l'impulsion carrée que forme le signal $(\theta_{i+1}-\theta_i)$ par une fonction fenêtre classique capable de réduire les rebonds de sa transformée de Fourier. Dans la pratique ceci revient à remplacer la rampe linéaire $\theta_i=\theta_p i/p$, par la sommation cumulative des

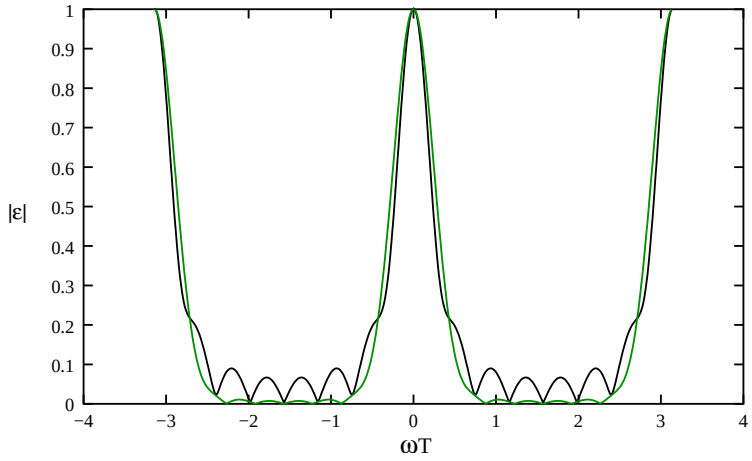

FIG. 9. Résultats de simulation, sans aucune approximation, de la composante perpendiculaire après une montée en rampe linéaire, en noir, et une montée sommation d'un Kaiser-Bessel ($\beta = 3$), en vert. Dans les deux cas la durée de la préparation est $p = 8$ et la nutation finale $\theta_p = 1$ radian.

échantillons de cette nouvelle fenêtre. La figure (9) compare le résultat par simulation (aucune approximation) de la rampe linéaire avec la somme d'une fenêtre de Kaiser-Bessel de même longueur ($p = 8$) et de paramètre $\beta = 3$. On appréciera l'amélioration importante apportée par cette modification mineure. Le seul prix à payer est un léger élargissement du haut du pic de l'erreur autour de $\omega = 0$ ou $\omega = \pi$; mais de toute façon, autour de ces fréquences, une autre technique plus drastique doit être employée.

Connaissant les valeurs de l'aimantation à la fin de la préparation, on peut extrapoler de façon exacte ce que seront les signaux dans le futur ; il faut pour cela trouver comment évolueront les parties parallèle et perpendiculaire et projeter chacune d'entre elles sur le plan x, y ; la partie parallèle $m_{\|}$ donne évidemment un signal constant ; quant à la partie tournante avec l'angle de rotation propre Ω dans le plan $\{x', y'\}$,$m_{\perp}$ ou ε_p, elle donne naissance après projection dans le plan $\{x, y\}$ à deux composantes spectrales ayant des pulsations radiales opposées $\pm\Omega/2T$. Le calcul du gain de chacune de ces composantes est trivial aussi ne le détaillons nous pas. C'est ainsi qu'on peut tracer les courbes théoriques de l'amplitude des trois signaux présents dans une expérience de *BSSFP* après que la stabilisation a été effectuée. On peut alors les comparer à l'expérience. Ce qui a été fait sur les figures (10) et (11), validant, s'il en était besoin, le modèle de la rotation d'écho à écho dans les séquences *SSFP* et aussi *CPMG*. Se reporter à la légende des figures pour les détails des conditions expérimentales.

2.3. Stabilisation de la *SSFP* , déphasée, par saturation préalable. On note sur la figure (11) qu'en utilisant la rampe Kaiser-Bessel on obtient une partie oscillante et donc un signal parasite qui est pratiquement annulé dans les deux tiers de la plage possible des

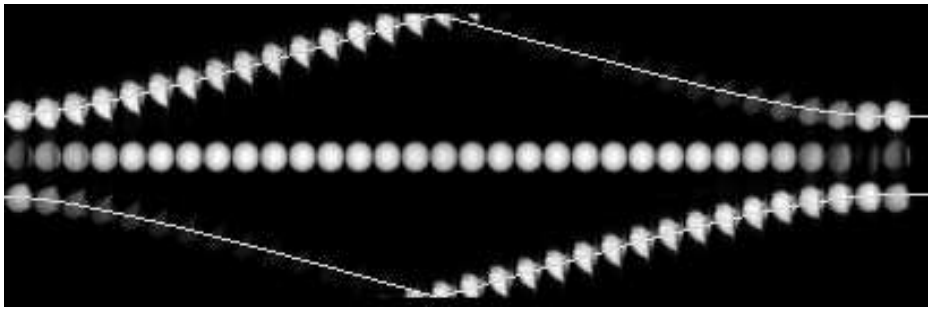

FIG. 10. Cette image résulte en fait du collage de trente deux acquisitions *BSSFP* différentes, effectuées sans stabilisation aucune. L'objet est constitué d'une sphère d'eau très peu dopée et à relaxation négligeable pendant tout le train d'acquisition. L'axe d'encodage est selon la verticale, et l'axe de lecture, tronqué donc à chaque acquisition, est horizontal. D'une acquisition à l'autre le champ central B_0 a été modifié de façon à ce que la résonance ω de l'objet dans le repère tournant fixe soit $\omega T = 0$ à l'extrême gauche $\omega T = \pi/2$ au centre et $\omega T = \pi$ à droite. L'objet principal est reconstruit à partir du signal constant provenant de la composante parallèle ; la composante perpendiculaire, tournant dans son plan avec l'angle de rotation propre Ω, génère deux artéfacts à la position géométrique correspondant à $\pm\Omega$; pour cela on rappelle qu'un signal qui change de signe à chaque écho (c-a-d $\Omega = \pm\pi$) se retrouve après reconstruction sur les bords du champ de vue. La courbe $\Omega = \Omega(\omega T)$ de l'équation (217) dédoublée a été ajoutée en surimpression, montrant l'adéquation du modèle.

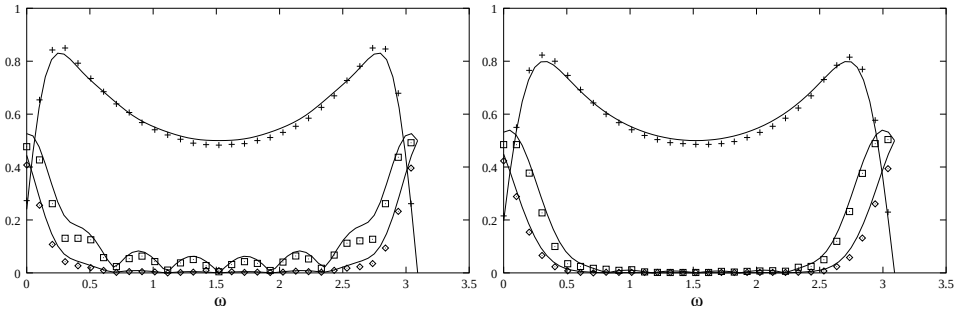

FIG. 11. Amplitude des signaux des trois objets reconstruits tels que sur la figure (10). Le premier, au centre de l'image, correspond à la pulsation réduite $\Omega = 0$ et les deux autres, des artéfacts, correspondant aux fréquences radiales $\Omega(\omega)/2T$ et $-\Omega(\omega)/2T$. On peut prévoir l'amplitude de chacun par le calcul théorique (courbes) et à partir de mesures sur de 32 images acquises comme sur la figure (10) avec différents ω : on a utilisé les signes + pour l'image centrale , et des losanges et carrés pour les deux artefacts. A gauche l'expérience et le calcul sont pour une préparation par rampe linéaire de 8 intervalles. A droite, a été utilisé une rampe Kaiser-Bessel de 8 intervalles avec un β de 3, montrant l'amélioration apportée par cette modification. Par ailleurs ces expériences corroborent le modèle simple de rotation d'écho à écho.

fréquences de résonance. Sachant que lorsqu'on utilise *BSSFP* on se place au milieu de cet intervalle, on peut estimer ce résultat comme étant satisfaisant. Malheureusement comme déjà mentionné la susceptibilité magnétique fait qu'on ne peut jamais être assuré de n'avoir aucun point de l'image qui passe à la fréquence de résonance $\omega = 0$,$\omega = \pi$ et génère ainsi un artefact intense correspondant alors à des rotations $\Omega = \pm\theta$. Ceci est encore plus vrai dans le cas de la *SSFP* déphasé où ces signaux parasites existent dans tous les cas. Elles sont même de valeur relative encore plus grande simplement parce que la partie utile du signal est diminué par déphasage. Ainsi la stabilisation quasi-adiabatique dans ce cas ne fait qu'une toute petite partie du travail. Cependant et comme le suggère l'équipe de l'université de Taiwan [**106**], on peut éliminer par saturation les bandes autour de $\omega = 0, \pi$, éliminant d'un coup la plupart des oscillations à $\Omega = \pm\theta$ qu'on a sur la figure (5). Il est toujours difficile d'admettre d'éliminer une partie de l'aimantation, mais le désir qu'on aurait de récupérer cette aimantation pour la positionner le long de l'axe de rotation et la faire participer ainsi au signal utile me parait difficile à exaucer à cause de la discontinuité de la position de l'axe à la fréquence 0 ou π. Si on accepte qu'il sera toujours impossible de réaliser cette opération, alors la suggestion de l'éliminer en préambule de la séquence est tout à fait justifiée.

2.4. Mise en équilibre semi-adiabatique de la séquence CPMG. Tel qu'il l'est fortement suggéré dans l'article [**93**], la transition semi-adiabatique présentée pour la *SSFP* pouvait être utilisée dans le cas de la séquence *CPMG* car il n'y a de différence entre les deux séquences que la condition initiale sur l'aimantation, et aucunement les conditions de variations *de l'axe de rotation* local qui est la seule variable qui définit l'adiabaticité. C'est ce que d'ailleurs a réalisé un de mes collègues qui a appliqué, très rapidement, la technique de la transition $Kaiser - Bessel$ à la diminution de l'angle de nutation dans le train *CPMG* [**107**], une fois l'écho effectif acquis et donc le contraste T_2 garanti. Ceci permet a priori de réduire la déposition d'énergie à haut champ. Remarquons cependant que ceci se paie par une perte de signal à bruit, car ce sont les plus petits signaux acquis par une séquence qui fixent, par la mise à l'échelle qu'on doit leur faire subir, le bruit dans l'image. En ce sens je pense que la simple stabilisation directe de 1993, [**102**], que nous allons revisiter ci-dessous, dégrade moins la qualité de l'image par l'effet combiné d'un signal maintenu à une valeur suffisante et d'une réduction du taux de relaxation. Le prix à payer est effectivement un contraste mélangé en T_1,T_2 mais il ne semble pas impossible de pouvoir isoler les deux contrastes en plusieurs expériences. Il se trouve que de toute façon cet algorithme rentre, peut-être par inadvertance, dans la catégorie des rampes semi adiabatiques, alors que son extension présentée par Alsop quatre ans plus tard [**103**], plus lente mais plus robuste se rapproche encore un peu plus d'une vraie rampe adiabatique. Notons toutefois que ni l'un [**102**] ni l'autre [**103**] de ces vieux articles ne fait référence au principe adiabatique. Pourtant on peut effectivement appliquer ce principe en partant d'un angle de nutation élevé et en le diminuant progressivement, en prenant soin que l'aimantation originellement positionnée en $\vec{x}$ reste accrochée à l'axe local l'aimantation. Cette procédure est a priori identique à celle utilisée en *SSFP* mais renversée dans le temps. Sauf qu'elle est beaucoup plus robuste

et facile : en effet au début du train la rotation Ω est très élevée, pour toutes les pulsations de résonance y compris celles autour de $\omega = 0$. A l'inverse, en *SSFP* l'aimantation dans cette région est nécessairement 'décrochée' de l'axe dès le début de la rampe ascendante, car on part d'une rotation Ω nulle dans cette région. Des problèmes de même ordre pourraient survenir en *CPMG* (décrochage de l'aimantation autour de $\omega = 0$ si θ_i devient trop petit) mais ceci se produit très longtemps après le début de la rampe descendante et ne concerne de toute façon qu'une aimantation alors peu susceptible d'émettre des signaux de grande amplitude car s'étant déphasée naturellement. C'est donc la raison pour laquelle la rampe lente proposée par Alsop [**103**] obtient un signal proche du maximum atteignable et ce d'une façon robuste. On peut se demander cependant si la complication apportée par rapport à la stabilisation originale [**102**] en vaut la peine car en effet le signal est variable en amplitude et il faut corriger cette modulation avant d'effectuer la reconstruction. Il reste que l'article [**103**] est intéressant car il donne une expression de la répartition des signaux stationnaires sans stabilisation, similaire mais plus compliquée que ce que nous avons donné, beaucoup plus tard il est vrai, dans [**93**] et que nous avons reproduit ci-dessus (214)(215). On peut unifier les deux types de résultats, en utilisant dans [**103**] les relations trigonométriques telles que $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\alpha/2$. De la même manière l'article donne une expression inutilement compliquée du signal ultime qu'on peut obtenir après une stabilisation parfaite, amenant l'aimantation initiale $M_0(\omega) = \vec{x}$ sur l'axe de la rotation locale $\vec{n}(\omega)$. L'expression de ce signal peut simplement s'écrire

$$S = \frac{2}{\pi} sK(c^2). \tag{224}$$

où K est l'intégrale elliptique complète de première espèce et accessible sur tous les logiciels scientifiques. On se reportera à l'appendice de ce chapitre pour la très rapide démonstration.

Revisitons maintenant les résultats de l'algorithme originel de stabilisation *CPMG* [**102**]. C'est un algorithme permettant, en faisant varier l'angle de nutation des impulsions *RF*, de conserver, dans un train *CPMG* et dès le premier écho, un signal constant S choisi à l'avance. Il est basé sur une analyse polynomiale similaire à l'algorithme *SLR* mais appliquée aux aimantations et aux équations de Bloch.

La figure (12) donne un certain nombre de décourts d'angles de nutation obtenus par cet algorithme et qui maintiennent pour chacun un signal constant, de valeur donnée. Comme on peut en juger ces lois temporelles ressemblent assez à des rampes descendantes partant d'une valeur beaucoup plus élevée que la valeur d'équilibre et s'adoucissant en fin de parcours. On trouve par simulation, car il n'a pas été possible jusqu'ici de le démontrer mathématiquement, que le signal d'équilibre S, et l'angle d'équilibre $\bar{\theta}$ vers lequel la suite des θ_i tendent, sont reliés par l'expression

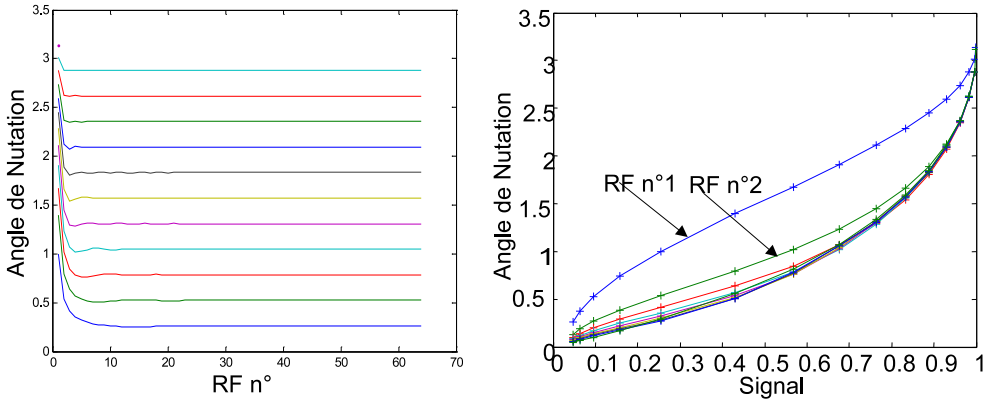

FIG. 12. A gauche, ensemble de suites d'angle de nutation $\theta_k(i)$, i étant le numéro de RF, $i = 1, 64$ donnant, pour chacune d'entre elles un signal constant $S_k(i) = S_k$. La valeurs des signaux S_ka été choisie ici telle que les lois $\theta_k(i)$ tendent vers les angles $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ et 165°. La figure de droite correspond à la même information : pour un signal donné en abscisse l'intersection de la verticale correspondante avec les courbes donne l'angle de nutation à appliquer pour chacun des numéros de RF.

$$S = \frac{2\sin(\bar{\theta}/2)}{1+\sin(\bar{\theta}/2)}. \tag{225}$$

C'est d'ailleurs cette formule, ou plutôt son inverse, qui nous a aidé à choisir la valeur des signaux S_k de la figure (12) pour obtenir un jeu de $\bar{\theta}_k$équidistants.

Ceci est à comparer au signal naturel, non stabilisé (219). On s'aperçoit que la stabilisation apporte une forte augmentation du signal, presque dans un rapport 2 à faibles angles. En sens inverse, pour un niveau de signal donné, on pourra réduire substantiellement l'angle de nutation d'équilibre. C'est une bonne voie pour réduire la déposition d'énergie à haut champ, d'autant plus que les faibles angles d'équilibre allongent les processus de relaxation, comme nous le verrons. Mais il est peut être encore plus instructif de comparer le signal obtenu par stabilisation avec le signal maximum qu'on puisse atteindre (224) au terme d'une très longue rampe adiabatique. On note alors que la stabilisation proposée donne un résultat très proche de l'optimum, voir la Figure (13).

3. Le Modèle simplifié de relaxation

L'apport principal de l'article [**93**] est certainement l'introduction d'un modèle simplifié des relaxations pendant un long train d'impulsions identiques. Déja l'article d'Alsop donnait des résultats de simulations et aussi d'acquisitions où l'allongement du T_{2eff} était démontré mais sans expressions évidentes. Or le modèle de rotation d'écho à écho couplé à la technique classique de calcul des variations des vecteurs propres et valeurs propres d'un

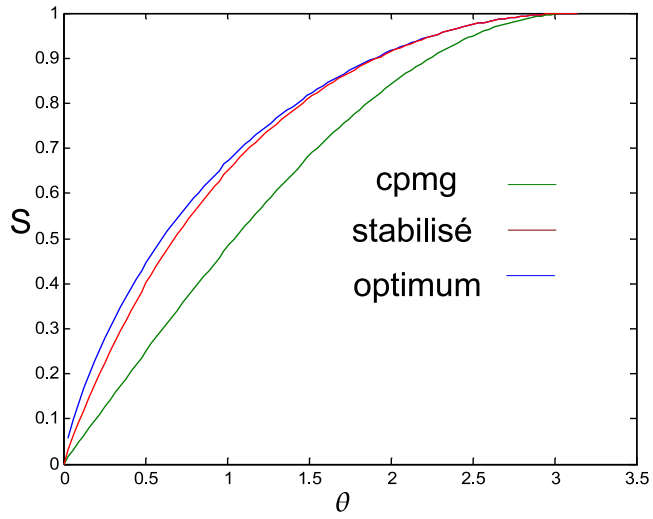

FIG. 13. On peut considérer cette figure comme une reproduction de la figure 1 de l'article d'Alsop [**103**], mais avec les équations simples (224)(225). La courbe en vert donne le signal stabilisé naturellement (sans variation de l'angle de nutation le long du train) pour différentes valeurs de l'angle de nutation. la courbe rouge est l'amplitude du signal stabilisé par l'algorithme [**102**], et enfin la courbe bleue est la plus grande valeur de signal qu'on puisse obtenir en réussissant à mettre l'aimantation le long de l'axe de rotation. On doit admettre que la stabilisation à signal constant [**102**] permet, sans complication, d'atteindre presque entièrement l'optimum.

opérateur permet d'obtenir des expressions approchées, certes, mais simples et valides dans une grande plage de paramètres. Donnons en de suite les résultats.

- si $r_1 = 1/T_1$ et $r_2 = 1/T_2$ sont les taux de relaxation respectivement longitudal et transverse, l'aimantation parallèle $\vec{m}_{\|}$, alignée avec l'axe de rotation local $\vec{n}$, relaxe selon une loi du premier ordre dont le taux est,

$$r_{\|} = n_x^2(\omega) r_2 + n_z^2(\omega) r_1, \tag{226}$$

où $n_x(\omega)$,$n_z(\omega)$sont les coordonnées de l'axe $\vec{n}$ relatif à la pulsation de résonance ω , comme trouvé en (214).

-Dans les mêmes conditions la composante perpendiculaire à l'axe, $\vec{m}_{\perp}$, oscillante avec l'angle de rotation propre Ω, subit par ailleurs une relaxation radiale de taux

$$r_{\perp} = \frac{r_2}{2} + \frac{n_z^2(\omega) r_2 + n_x^2(\omega) r_1}{2}. \tag{227}$$

-Dans les mêmes conditions l'aimantation tend vers une position d'équilibre $\bar{\vec{m}}$ pour laquelle la projection sur le plan perpendiculaire est $\bar{m}_\perp = 0$.

$$\bar{\vec{m}} = \bar{m}_\parallel \vec{n} \tag{228}$$

Si l'équilibre thermique sans excitation est de valeur 1 le long de $\vec{z}$, la composante parallèle à l'équilibre est

$$\bar{m}_\parallel = \frac{r_1}{r_\parallel} n_z, \tag{229}$$

soit

$$\bar{m}_\parallel = \frac{r_1}{n_x^2(\omega) r_2 + n_z^2(\omega) r_1} n_z. \tag{230}$$

Cependant cette dernière expression peut être ambiguë car il y deux façons de définir n_z, selon qu'on considère le diagramme en papillon ou en éventail. On imagine bien que c'est la caractérisation avec n_z positif qu'il faut prendre mais pour lever toute difficulté il suffit de donner les coordonnées dans le repère x, z de cette aimantation. Ceci a de plus l'intérêt de donner par la composante $\bar{m}_x$ la valeur du signal d'équilibre en *BSSFP* :

$$\begin{array}{rcl} \bar{m}_x & = & \frac{r_1}{n_x^2(\omega) r_2 + n_z^2(\omega) r_1} n_x n_z \\ \bar{m}_z & = & \frac{r_1}{n_x^2(\omega) r_2 + n_z^2(\omega) r_1} n_z^2. \end{array} \tag{231}$$

On peut bien sûr aller encore plus loin et exprimer ces résultats uniquement en fonction de s^2 et $c^2 \cos^2(\omega)$ mais on préférera sans doute garder les expressions brutes (226)(227) et (229) qui sont de mémorisation simple.

A cela ajoutons la précision suivante. Ces relations sont approximatives, car dérivées au premier ordre des équations définissant les valeurs propres et vecteur propres. Cependant elles restent valides tant que $(r_2 - r_1)T$ reste petit devant la rotation propre Ω. Ainsi les problèmes arriveront d'abord pour des relaxations rapides et pour des angles de nutation θ faible et alors surtout pour des pulsations proches des pulsations de résonance $\omega = 0$ ou $\omega = \pi$. Dans les conditions usuelles en imagerie, il n'y a aucune différence visible entre ces équations simplifiées et les résultats obtenus par la simulation des équations de Bloch. Cela exclut évidemment les applications d'imagerie à T_2 très court.

La démonstration de ces relations reprend essentiellement la démonstration présentée en [**93**] ; elle n'a rien de compliqué et suit une procédure classique en calcul numérique pour déterminer le conditionnement des valeurs et vecteurs propres (voir par exemple [**108**] page 344 à 346 de la seconde édition de langue anglaise). Étant cependant un peu rébarbative, elle est présentée en appendice.

J'ai découvert récemment l'article de Hürliman et Griffin [**109**] qui donne des résultats identiques, en particulier (226) ; cependant il me semble que la démonstration de cette formule manque, ou alors elle est tellement compliquée qu'elle ne saute pas aux yeux. Dans tous les cas l'approche présentée ici est beaucoup plus légère.

4. Conclusion

L'article [**93**] donne un modèle simple et visuel de la dynamique de l'aimantation durant les séquence *SSFP* ou *CPMG*. Les équations simplifiées décrivant la relaxation devraient avoir un impact sur l'extraction de paramètres de valeur clinique comme T_1 et T_2 dans les imageries rapides. L'exploitation du modèle dans les algorithmes de stabilisation a déjà été utile, ou en tout cas permet une compréhension physique de procédures parfois un peu trop mathématiques. L'approche spineur a permis de simplifier considérablement ou la démonstration ou même l'écriture de résultats déjà établis.

5. Appendice

5.1. Amplitude du signal CPMG (sans préparation). On suppose une densité de magnétisation $1/2\pi$, c'est à dire que le signal maximum, après intégration sur $\varphi = \omega T$ de $-\pi$à π, est égal à 1. Le signal provenant de la tranche φ de $-\pi/2$ à $\pi/2$ étant répété dans l'autre demi élément d'écrasage, on n'intègre que de $-\pi/2$ à $\pi/2$

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{s^2}{s^2 + c^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{232}$$

exprimant $\sin^2\varphi$ par $\frac{1}{1+\tan^2(\varphi)}$, simplifiant pour ne laisser que s^2 on a

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\tan^2(\varphi)}{1+\tan^2(\varphi)/s^2}\mathrm{d}\varphi \tag{233}$$

faisant intervenir comme variable indépendante $u = \tan\varphi$, $\mathrm{du} = (1+\mathrm{u}^2)\mathrm{d}\varphi$

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2/s^2}\mathrm{d}u \tag{234}$$

et après avoir posé $v = u/s$, et être revenu à un angle φ' par $\tan\varphi' = v$

$$S = s\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}v = s\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \mathrm{d}\varphi' = s. \tag{235}$$

Bien sûr le changement direct de variable

$$\varphi' = \arctan\frac{1}{s}\tan\omega T \tag{236}$$

aurait donné le résultat plus rapidement.

5.2. Signal *CPMG* après stabilisation parfaite. On suppose que par préparation adiabatique ou autre on a réussi à transférer l'aimantation M_0 originellement en $\vec{x}$ en alignement parfait avec l'axe de rotation local $\vec{n}(\omega)$. Le signal global est alors (on peut se contenter d'intégrer sur $1/4$ du volume d'écrasage)

$$S = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} n_x(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{s}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi}} d\varphi \tag{237}$$

qu'on peut directement écrire en fonction de l'intégrale elliptique complète de première espèce [**110**]

5.3. Modèle simplifié du processus de relaxation. Il nous faudrait d'abord écrire la matrice de passage dans l'espace ordinaire de l'aimantation $\vec{M}(\omega, i-1)$ à l'aimantation $\vec{M}(\omega, i)$ à l'écho i ; c'est nominalement une matrice de rotation 3×3, que nous notons symboliquement R mais sans l'expliciter, ce qui est inutile car nous connaissons déja, ses vecteurs propres et ses valeurs propres. En effet par définition l'axe de la rotation $\vec{n}$, dont nous avons trouvé, en passant aux spineurs, les composantes en (214), est vecteur propre associé à la valeur propre 1, car non modifié par la rotation. L'ensemble des vecteurs perpendiculaires à cet axe subit une rotation dans ce plan perpendiculaire ; commençons par repérer tout vecteur de ce plan perpendiculaire par ses projections sur les vecteurs, $\vec{y}$ deuxième axe du repère original, et par le vecteur $\vec{v}$, vecteur contenu dans le plan x,z et perpendiculaire à $\vec{n}$ (de coordonnées, $(-n_z, 0, n_x)$). Le repère $\vec{v}$, $\vec{y}$, $\vec{n}$ est direct. Alors, si la première composante b_v est la projection du vecteur le long de $\vec{v}$, la seconde composante b_y la projection le long de $\vec{y}$, la rotation d'angle Ω (on choisit ici la représentation papillon où Ω est toujours entre $-\pi$et π) et d'axe $\vec{n}$ est représentée par

$$\begin{bmatrix} b_v \\ b_y \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_v \\ b_y \end{bmatrix}_i$$

dont on préfère décomposer la matrice réelle 2×2 en utilisant des nombres complexes

$$\begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos\Omega \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\Omega} & 0 \\ 0 & e^{-j\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{238}$$

Ceci amène à projeter le vecteur sur les vecteurs complexes $\vec{v_1} = \vec{v} - j\vec{y}$, de valeur propre $\lambda = e^{j\Omega}$, et $\vec{v}_2 = \vec{v} + j\vec{y}$ de valeur propre $\bar{\lambda} = e^{-j\Omega}$.

En résumé, sachant qu'il est facile à tout moment d'expliciter les composantes de $\vec{n}$, $\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$ on peut écrire la matrice de rotation R symboliquement sous la forme (avec $\lambda_0 = 1$, $v_0$le vecteur colonne représentant les trois coordonnées de $\vec{n}$, $\lambda_1 = \exp j\Omega$, v_1 le vecteur colonne coordonnées de $\vec{v}_1$,...)

$$R = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k v_k \bar{v}_k. \tag{239}$$

Ou tout aussi classiquement en definissant la matrice 3×3 , U, des vecteurs propres rangés en colonne $U = [n, v_1, v_2]$, et Λ la matrice diagonale des vecteurs propres $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda_1, \bar{\lambda_1})$

$$R = U\Lambda U^*. \tag{240}$$

5.3.1. *Relaxation sans repousse.* Nous tenons compte maintenant des relaxations. D'abord sans s'occuper de la repousse le long de z (comme pour un gaz ou autre liquide pré polarisé) ; cela consiste à ajouter de part et d'autre une matrice de relaxation diagonale, le transfert, que nous notons maintenant A

$$A = ERE, \tag{241}$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} e^{-r_2 T} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-r_2 T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-r_1 T} \end{bmatrix} \simeq \mathbf{1} - \begin{bmatrix} r_2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 \end{bmatrix} T.$$

Écrivons $E = \mathbf{1} - O$ avec O donc une matrice diagonale de petite valeur, et revenons à A, le décomposant au premier ordre (suivant O)

$$A = R - (OR + RO). \tag{242}$$

Nous utilisons maintenant une procédure classique [**108**]. Connaissant les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A peut-on estimer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $A + dA$ (avec ici $\mathrm{dA} = -\mathrm{OR} - \mathrm{RO}$) ? Reprenant la définition d'un vecteur propre et de sa valeur propre et avec les notations évidentes des variations du_i du vecteur propre considéré et $d\lambda_i$ la variation de la valeur propre associée

$$(A + dA)(u_i + du_i) = (u_i + du_i)(\lambda_i + d\lambda_i) \tag{243}$$

et développant, simplifiant et négligeant les termes d'ordre deux, on obtient une équation vectorielle (n egalités scalaires)

$$A(du_i) + (dA)u_i = (du_i)\lambda_i + u_i(d\lambda_i). \tag{244}$$

Multipliant d'abord cette équation à gauche par u_i^* (c'est a dire en effectuant le produit scalaire par u_i) et tenant compte du fait qe $Au_i = u_i\lambda_i$, et que $u_i^* u_i = 1$, on trouve immédiatement la variation de la valeur propre

$$u_i^*(\mathrm{d}A)u_i = d\lambda_i. \tag{245}$$

Alors effectuant tour à tour, $j = 1, n$, $j \neq i$, le produit scalaire des autres vecteurs propres avec les deux membres de l'équation (244) on a

$$u_j^*(\mathrm{d}A)u_i = (\lambda_i - \lambda_j)(u_j^*\mathrm{d}u_i). \tag{246}$$

Or les $(u_j^*\mathrm{d}u_i)$ sont les projections de du_i sur les vecteurs propres initiaux ; et on peut toujours représenter $\mathrm{d}u_i$ sur cette base orthogonale. Ce faisant, on obtient

$$du_i = \sum_{j\neq i} u_j \frac{u_j^*(\mathrm{d}A)u_i}{\lambda_i - \lambda_j}. \tag{247}$$

Ceci étant rappelé, appliquons ces résultats à notre cas. On remarque d'abord que tous les produits scalaires de type $u_j^*\mathrm{d}Au_i$, deviennent avec $\mathrm{dA} = -\mathrm{OR} - \mathrm{RO}$, et avec l'opérateur initial $A = R$,

$$u_j^*(dA)u_i = -(\lambda_i + \lambda_j)(u_j^*Ou_i). \tag{248}$$

L'application de $i = j$ est très gratifiante car on obtient très rapidement ainsi les nouvelles valeurs propres. L'appliquant d'abord au vecteur propre $\vec{n}$ on trouve que la variation de la valeur propre, par rapport à sa valeur originale de 1, est

$$\mathrm{d}\lambda = -2n^*On = -2(n_x^2 r_2 + 0r_2 + n_z^2 r_1)T. \tag{249}$$

Et donc la nouvelle valeur propre $\lambda_0' = 1 + d\lambda$ est equivalente sur un temps $2T$ à une relaxation selon le nouvel axe propre de

$$r_\parallel = n_x^2 r_2 + n_z^2 r_1. \tag{250}$$

Appliquons maintenant $i = j$ au vecteur propre v_1, de valeur propre initiale $\lambda_1 = e^{j\Omega}$. On a

$$\mathrm{d}\lambda_1 = -2\lambda_1 v_1^* O v_1 = -\lambda_1(v^*Ov^* + y^*Oy), \tag{251}$$

le passage entre les deux membres de la dernière égalité venant du fait que fortuitement la relaxation O conserve l'orthogonalité entre $\vec{v}$ et $\vec{y}$. La nouvelle valeur prope est donc

$$\lambda_1' = e^{j\Omega}(1 - (n_x^2 r_1 - n_z^2 r_2 - r_2)T), \tag{252}$$

qui est l'équivalent d'un processus de relaxation du premier ordre s'appliquant dans le plan perpendiculaire au (nouvel) axe de rotation, pendant un temps $2T$, avec un taux

$$r_\perp = \frac{r_2}{2} + \frac{n_z^2 r_2 + n_x^2 r_1}{2}. \tag{253}$$

On trouverait bien sûr pour nouvelle valeur propre λ_2 la conjuguée de λ_1. De la même façon, peu nous importe de calculer la position des nouveaux $\vec{v}_1$et $\vec{v}_2$ car il vont rester perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au nouvel $\vec{n}$. Mais donc la question importante qui se pose encore est de savoir si le nouvel $\vec{n}$ est trés différent du $\vec{n}$ initial. Autrement dit quelles sont les coordonées du nouvean $\vec{n}$ dans $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$? D'après (248) et (247) la variation de $\vec{n}$ a comme variation le long de v_1, notée b_1

$$b_1 = -\frac{1+e^{j\Omega}}{1-e^{j\Omega}}(\frac{(v-jy)^*}{\sqrt{2}}On) = \frac{v^*On}{j\sqrt{2}\tan\Omega/2} \tag{254}$$

car comme déja dit la relaxation ne modifie pas l'orthogonalié de y et n et donc $yOn = 0$. Et donc la coordonnée de la variation de $\vec{n}$ le long de v_2 est

$$b_2 = -\frac{1+e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}(\frac{(v-jy)^*}{\sqrt{2}}On) = -\frac{v^*On}{j\sqrt{2}\tan\Omega/2} = b_1^* = -b_1 \tag{255}$$

et donc

$$d\vec{n} = b_1(\frac{v+jy}{\sqrt{2}} - \frac{v-jy}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}jb_1\vec{y} = \frac{v^*On}{\tan\Omega/2}\vec{y}, \tag{256}$$

$$d\vec{n} = \tilde{\mathrm{y}}\mathrm{d}b_y = \vec{y}\frac{n_x n_z}{\tan\Omega/2}(r_1 - r_2)T. \tag{257}$$

La coordonnée $\mathrm{d}b_y$ a une forme compliquée mais elle est à priori maximale ou très proche du maximum pour $n_x = n_y$ c-a-d pour $c\sin\omega T = s$ (pour lequel $n_x n_z$est maximum egal alors que Ω est encore lentement variable). En ce point on a $1/\tan\Omega/2 = \sqrt{1-2s^2}/(\sqrt{2}s)$ et finalement on peut fournir comme majorant de $\mathrm{d}b_y$

$$|\mathrm{d}b_y| < \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(r_2-r_1)T}{\sin\theta/2} < \frac{(r_2-r_1)T}{\sqrt{2}\theta}. \tag{258}$$

Comme on pouvait le prévoir, les problèmes se posent pour des tissus à relaxation courte, comme le muscle ($T_2 \simeq 40ms$) et pour la séquence spin-écho raide ($CPMG$) qui a un demi-temps inter écho relativement long $T = 2.5ms$, et bien sur pour des angles de nutation faible. Mais on peut vérifier que pour $\theta > 10^\circ$ on obtient $|b_y| < 0.25$, ce qui assure de ne pas avoir une baisse significative du signal, bien que cela entraine une variation visible mais non gênante de la phase.

En conclusion, pour les paramètres usuels en imagerie par résonance magnétique, la variation de l'axe de la rotation est sans effet sur l'amplitude du signal.

5.3.2. *Repousse et équilibre statique.* Venons en maintenant à la valeur d'équilibre, qu'il est important de caractériser en $SSFP$, car c'est elle qui règle le signal à l'équilibre, mais aussi en spin-écho rapide de par l'influence que ce cette quantité exerce sur la repousse de l'aimantation entre une acquisition et la suivante.

De l'écho $i-1$ à l'impulsion i la composante z de l'aimantation s'accroit de $1-\exp(-r_1T)$, soit dans nos conditions r_1T, subit la rotation autour de x, puis la precession ; mais prenant cette deuxième précession s'ajoute encore une fois une composante de repousse le long de $\vec{z}$ et de valeur r_1T. Pour être précis on est tenté d'écrire l'équation de tranfert de l'aimantation à l'écho $i-1$ vers l'aimantation à l'écho i sous la forme

$$M(\omega,i) = ERE \times M(\omega,i-1) + RE \times (r_1T)z + (r_1T)z, \tag{259}$$

avec le premier terme du sesond membre, le terme de rotation relaxée que nous venons d'étudier et les deux derniers termes, les termes de repousse juste introduits. C'est d'ailleurs ce qui est fait dans l'article mais cela complique l'analyse et peut amener des erreurs. Le mieux est pour étudier la repousse de regarder le cycle de début d'impulsion à début d'impulsion.

Plaçons nous à nouveau dans le répère des vecteurs propres de la rotation relaxée, qui nous le savons maintenant sont pratiquement les vecteurs propres $\vec{n}$, $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$ de la rotation non-relaxée. Il suffit pour cela de multiplier l'équation (259) à gauche par U^*, avec on le rappelle $U = [n|(v-jy)/\sqrt{2}|(v+jy)/\sqrt{2}]$ et notant $U^*M_i = m_i$ et $U^*z = \zeta$ et $U^*E^{-1}z = \zeta'$. On trouve $\zeta = [n_z, n_x, n_x]^t$ et $\zeta' = (1+r_1T)\zeta$.

$$m(\omega,i) = \Lambda' m(\omega,i-1) + [\Lambda'(1+r_1T)+1](r_1T)\zeta. \tag{260}$$

On obtient la position d'équilibre par ces trois équations découplées, dont la solution est por chacune d'entre elles $k = 0\ldots2$

$$\bar{m}_k(\omega) = \frac{1+(1+r_1T)\lambda'_k}{1-\lambda'_k}(r_1T)\zeta_k \simeq \frac{1+\lambda'_k}{1-\lambda'_k}(r_1T)\zeta_k, \tag{261}$$

où on a négligé dans la deuxième écriture les termes du deusième ordre en r_1T au numerateur. Considérons d'abord la première et la plus importante d'entre elles $k=0$, relative à la projection sur $\vec{n}$; on a

$$\bar{m}_0(\omega) \simeq \frac{2}{1-\lambda'_0}(r_1T)n_z = \frac{2}{1-(1-2(n_x^2r_2+n_z^2r_1)T)}n_z(r_1T) = \frac{n_z}{n_x^2r_2+n_z^2r_1}(r_1T). \tag{262}$$

d'où l'équation (229) avec $\bar{m}_0$ changé en la notation moins liée au développement mathématique de cette annexe, $\bar{m}_{\|}$.

Quant au deux autres elles sont conjuguees l'une de l'autre et sont la valeur d'équilibre statique d'un système du deuxieme orde. Il suffit de considérer l'une d'entre elle

$$\bar{m}_1 = \frac{1+e^{j\Omega}(1-2r_\perp T)}{1-(1-2r_\perp T)e^{j\Omega}}n_x \times (r_1T), \tag{263}$$

dont on peut majorer le module par

$$|\bar{m}_1| < \frac{r_1}{\sqrt{\frac{|\sin\Omega|^2}{4T^2} + r_\perp^2}} n_x \tag{264}$$

Et pour $\omega = 0$ ou $\omega = \pi$ pratiquement

$$|\bar{m}_1| < \frac{r_1}{\sqrt{(\frac{\theta}{2T})^2 + (\frac{r_1+r_2}{2})^2}} \tag{265}$$

On en déduit que $\theta > 6r_2T$, c'est à dire que la nutation est assez élevée pour imposer une rotation de un tour dans un temps l'ordre de deux temps relaxation on est assuré que la composante transverse est négligeable.

CHAPITRE 4

Spin Echo Rapide Insensible à la Phase d'origine.

1. Pourquoi Non-CPMG ?

1.1. Les applications impossibles avec *CPMG*. Nous avons noté au chapitre précédent que les séquences de type écho de spin rapide reposant sur le principe *CPMG* ne sont capables d'acquérir l'image que d'une seule composante de l'aimantation initiale, contrairement aux imageries rapides de type écho de gradient, ou écho planar (*EPI*). Dans la plupart des applications ceci n'est pas gênant, la meilleure preuve en étant que la séquence *CPMG* est utilisée à chaque examen clinique pour obtenir les images pondérées en T_2. Mais on peut tout de même trouver une liste d'applications impossibles à ce jour et qui le deveindraient si la sensibilité à la phase initiale de l'aimantation était éliminée. Cela concerne d'abord tous les types d'acquisitions qui nécessitent un encodage volontaire de la phase de l'aimantation : par exemple l'encodage en phase de la vitesse du flux ou du mouvement est impossible avec la séquence *CPMG*. Autre exemple, l'encodage préalable du décalage chimique, qui serait utile par exemple pour imager une répartition de température, est impossible. On trouvera toute une galerie de telles applications dans l'article pionnier de David Norris *et alii* [**111**]. Il existe par ailleurs le cas où une modulation de phase est créée involontairement. L'exemple représentatif et d'importance est le cas de l'imagerie de diffusion. Dans son expression la plus simple, la sensibilisation à la diffusion consiste à ajouter un gradient bipolaire dont chaque composante est de grande intégrale entre la 90° et la première 180° (pour être précis c'est l'intégrale du carré du module de l'intégrale qui est grand). Il y a déjà là sujet à questionnement car une des conditions de la séquence *CPMG* est que le temps séparant la 90° de la première impulsion de refocalation doit être la moité de celui séparant deux impulsions de refocalisation successives ; or il n'y a certainement pas la possibilité d'insérer dans cet intervalle, qui est typiquement de deux ou trois millisecondes, des encodages de gradient aussi énormes que ceux demandés par la sensibilation en diffusion. En effet chacun des deux lobes de gradients doit imposer un encodage spatiale qui typiquement correspond à un tour de phase dans la dizaine ou quelques dizaine de microns ! Etant donnée la contrainte d'amplitude de gradient cela demande des temps d'encodage de plusieurs dizaines de millisecondes dans le meilleur des cas, et il faut donc faire une croix sur l'une des conditions *CPMG* . Mais le principal défaut, qui est une modulation de phase résiduelle, provient aussi de la valeur même de cet encodage spatiale, un tour dans cinquante microns, couplé au moindre mouvement du sujet. En effet, il suffit qu'entre le centre des deux lobes opposés de gradient, séparés d'environ cinquante millisecondes, une portion de l'objet ait bougé d'une distance de cinquante microns pour que la phase de l'aimantation ait fait un tour complet ! Et puisqu'il suffit d'une modulation de phase de un quart de tour pour obtenir un zéro de signal, la séquence *CPMG* pondérée en diffusion est alors complètement inutilisable pour des bougés de l'ordre du quart de millimètre par seconde !

On peut cependant se poser légitimement la question : pourquoi utiliser la séquence *CPMG* quand les séquences de diffusion basées sur *EPI* donnent de bons résultats particulièrement dans l'encéphale, là où les applications cliniques ou de recherche de la diffusion

sont les plus utiles ? La réponse est que d'autres parties du corps humain qui sont difficilement accessibles par la séquence *EPI*, os, rachis, proximité des poumons, le foie et les intestins, ou même certaines parties de l'encéphale, pourraient profiter de l'existence d'une séquence de diffusion insensible à la susceptibilité ou au T_2^*.

1.2. Les solutions de désensiblisation à la phase initiale. L'article de Norris *et alii* [**111**] montre de façon assez remarquable qu'on peut décomposer le signal dans une séquence *CPMG* sous forme de deux signaux. Un de ces signaux provient de la partie de l'aimantation qui a subi un nombre pair de renversements de phase, et qui donc à un écho donné, aura une phase qui variera comme la phase initiale de l'aimantation. L'autre moitié est composée des autres chemins, correspondant à un nombre impair de renversements ; la phase de ce signal varie à l'opposé de la phase initiale de l'aimantation. Cette image n'est pas une représentation de l'esprit et on peut, dans la réalité, séparer ces deux signaux. Il suffit pour cela de ne pas satisfaire la première condition *CPMG* qui fixe un rapport $1/2$ entre les intervalles 90°-180° et les intervalles 180°-180°. Par exemple David Norris propose une expérience où l'intervalle 90°-180° aurait une durée égale au $3/4$ de l'intervalle 180°-180°. On obtient alors deux échos, l'un au premier quart de l'intervalle, l'autre au dernier quart. On remarque dans cette expérience que l'amplitude de ces échos, covariants et contravariants, sont chacun assez oscillants mais avec une valeur moyenne commune. Par contre leurs parties oscillantes, au moins après un temps de mise en équilibre, tendent à devenir opposées l'une à l'autre. Si maintenant nous rapprochons les deux d'échos en ramenant le temps de préparation 90°-180° vers sa valeur normale, les deux parties constantes viennent s'ajouter et les parties oscillantes viennent se compenser, donnant le signal à variation douce et d'amplitude élevée, comme montré sur les diagrammes du haut de la figure (3) du chapitre précédent. Pour être plus précis, il en est ainsi dès que la phase de l'aimantation de départ est calée suivant la condition *CPMG*, l'aimantation étant alignée avec l'axe d'émission des impulsions *RF* de refocalisation ! Supposons qu'il en soit ainsi et faisons maintenant varier cette phase, par exemple jusqu'à l'augmenter de 90° ; la moitié covariante du signal a alors tourné de 90°, tandis que la contravariante a tourné, en sens opposé, de -90° ; les deux signaux sont en opposition de phase, leur partie constante s'annulent ne laissant que les parties oscillantes, qui s'ajoutent, ce qui donne le signal chaotique et fugitif du bas de la figure (3). Si ce phénomène est aussi bien expliqué par le modèle de la rotation d'écho à écho du chapître précédent, le présent point de vue donne l'idée d'une solution capable de réduire la sensibilité de *CPMG* à la phase initiale. Puisque la sensibilité à la phase provient de la combinaison de deux signaux, il suffit d'éliminer l'un d'entre eux ! C'est la solution Norris *et alii*. On réalise cependant rapidement que cette solution présente deux défauts. D'abord le signal moyen n'est plus que la moitié de celui obtenu avec *CPMG*, ensuite la partie oscillante réapparait. Autant dire que dans le contexte de l'imagerie clinique cette solution n'est guère utilisable. C'est alors qu'intervient Alsop qui en 1997 [**112**] utilise une séquence *CPMG* mais additionnée d'une préparation composée d'un gradient

déphaseur le long la direction d'encodage y et d'une 90° qu'on pourrait appeler de 'séparation' pour la distinguer de l'impulsion de bascule à 90°. Ce gradient et cette 90° génèrent deux cohérences, ou en terme d'imagerie deux composantes de fréquence spatiale dans le plan transverse, chacune ayant l'amplitude $1/2$. On note que ces deux composantes fréquentielles distinctes représentent la moitié de la puissance de signal disponible au départ. L'autre moitié est envoyée sous forme de deux cohérences longitudinales, qui ne réapparaîtront jamais dans le signal mesuré grâce, ou à cause, des gradients d'écrasage déja présents dans la séquence *CPMG* classique qui suit cette préparation. Il suffit ensuite d'un gradient positionné juste avant la lecture et appliqué le long de y et de même intégrale que le gradient de séparation, pour récupérer une des cohérences transverse, avec une amplitude $1/2$, ne représentant donc qu'un quart de la puissance de signal disponible au départ. Il ne faut pas oublier bien sûr de compenser ce gradient juste avant l'impulsion suivante pour ne pas perturber l'équilibre dynamique et conserver ainsi une séquence *CPMG* classique. Le signal obtenu est la moitié du signal *CPMG* mais il en a le même décourt temporel, et présente donc très peu d'oscillations et génère très peu d'artéfacts après reconstruction de l'image. Le fait que seulement la moitié du signal est utilisé a poussé quelques auteurs à proposer d'acquérir la deuxième cohérence transverse, qui est effectivement disponible. Ceci a été critiqué et de façon évidente en remarquant que toute chose étant égale et en paticulier l'intervalle entre deux impulsions de refocalisation étant fixé, la lecture en séquence de deux signaux impose au minimum de doubler la bande de signal et donc aussi la puissance de bruit, faisant perdre le facteur $\sqrt{2}$ sur le signal à bruit qu'on gagnerait par accumulation des deux signaux. Donc toutes ces solutions annulent la sensibilité à la phase initiale mais avec comme prix à payer une réduction du signal par deux par rapport au signal *CPMG*.

1.3. La modulation de phase du train d'impulsions. La perte d'un facteur deux sur le signal et donc, de façon plus parlante, le quadruplement du temps total d'acquisition nécessaire à l'obtention d'un rapport signal à bruit donné, est très choquant. C'est pourquoi je me suis attelé vers 1998 à essayer de conserver toute la puissance du signal disponible, tout en éliminant la sensibilité à la phase initiale. Dès le début je me suis orienté vers la modulation de la phase de référence de chacune des radiofréquences de refocalisation [**113**]. La justification peut être résumée ainsi : que faire d'autre ? En effet, toute manipulation par des gradients avec séparation de cohérences semble induire automatiquement une perte de signal. Quant à la modulation de l'angle de nutation la connaissance de la stabilisation de *CPMG* et du modèle présenté au chapitre précédent suggère qu'il n'y a rien à attendre de cette voie. Que reste-t-il d'autre que l'adjunction d'une modulation de phase ?

L'utilisation de la modulation en phase d'une séquence de radofréquence n'est pas nouvelle. On a cherché dans le passé, dans les applications de découplage en particulier, à obtenir périodiquement une refocalisation parfaite. On peut citer parmi les publications relativement récentes les séquences de type *XY* ou *MLEV* [**114**][**115, 116**]. Mais il ne faut pas oublier la définition itérative de séquences générant une rotation de π ou 2π par compensation progressive, insufflée par Ray Freeman (voir [**4**]). Mais dans le domaine de l'*IRM*

et des trains d'impulsions dures (large bande) qui nous intéressent ici, ce sont les travaux sur la modulation quadratique qui ont été inspirateurs. En premier lieu, il faut citer le travail de Zur *et alii* [**117**] s'intéressant à la séquence d'écho de gradient rapide et donnant accès au contraste T_1 grâce à une modulation de phase quadratique, travail d'importance considérable en clinique comme on sait. La deuxième source inspiratrice a été la communication de Murdoch à l'ISMRM 1994 [**118**], embryon de l'analyse de train d'échos de spin modulée par une phase quadratique.

Cependant mes premiers résultats ont été obtenus par la lourde technique de l'optimisation paramétrique, et ce n'est qu'à partir des résultats obtenus que j'ai redécouvert les travaux précédents et ai investi dans la compréhension de la modulation quadratique. Il n'est pas question évidemment de revenir sur les résultats de cette première période [**113**] mais il faut rappeler les deux questions auxquelles il était nécessaire de répondre avant de se lancer dans une telle optimisation car ces questions restent d'actualité. Que veut-on obtenir ? De quelle façon (avec quelles variables) l'obtenir ? A la deuxième question nous avons déjà répondu : on admet de faire varier la phase de référence de chacunes des RFs. Mais alors se pose rapidement, dans la pratique, une question subsidiaire : si on fait varier la phase des RFs, faut-il faire varier aussi la phase du récepteur ? Comment ? Quel est le repère de référence ? Et pour répondre à celle-ci le seul moyen est d'abord de se mettre d'accord sur la toute première question : que veut-on obtenir ? Et là encore beaucoup de possibiltés sont ouvertes, mais voici ce qu'on peut logiquement proposer.

On cherche à obtenir, même lorsque l'angle de refocalisation θ est différent de 180°, un comportement de l'aimantation identique à celui qu'elle aurait lors d'une expérience d'écho de spin idéale, à un facteur près $k(\theta)$ sur l'amplitude du signal.

Par écho de spin idéal on entend évidemment une expérience où l'angle de refocalisation est très exactement 180°. Or, l'action d'une 180° sur une aimantation contenue dans le plan transversal est de conserver inchangée la composante parallèle à son axe et de changer le signe, à chaque écho, de la composante perpendiculaire. Notons que dans cette expérience d'écho de spin idéal, rien n'exige que les RFs soient emises sur un axe constant. Cette remarque est justement ce qui permet de définir l'axe de réception dans une expérience non idéale. On arrive ainsi à la figure 3 de l'article [**119**] reproduit en annexe de ce chapitre. Dans la pratique, les axes d'émission sont donnés et il suffit, se choisissant un axe de référence à l'écho zéro, de suivre son évolution sous l'influence d'une (hypothétique) impulsion de 180° positionnée sur les axes d'émission. Il est évident qu'alors, une aimantation dite en phase car parallèle à l'axe de référence à l'écho zéro restera en phase à tous les échos et donnera un signal constant, si la refocalisation est de 180°. Mais aussi une aimantation dite en quadrature c'est à dire perpendiculaire à l'axe à l'écho zéro, restera en quadrature pendant toute la durée du train, en changeant de signe cependant entre chaque écho.

En résumé si $M_{xy}(0)$ est l'aimantation à l'écho zéro, on cherche à obtenir un signal, intégrale volumique de l'aimantation transverse qui soit, suivant que le numéro d'écho i est pair ou impair, proportionnel à l'aimantation transversale originelle ou proportionel à son complexe conjugué (l'approche de l'article est plus générale que ce modèle, mais celà nous

entrainerait dans trop de détails de l'expliquer dans ce survol). Mathématiquement, si $\vec{P}$ est la coordonnée géométrique on suppose pouvoir réaliser le fait que deux signaux successifs s'ecrivent sous la forme

$$\begin{aligned} S(2l) &= k(\theta)\int M_{xy}(0,\vec{P})\mathrm{d}\vec{P} \\ S(2l+1) &= k(\theta)\int M^{*}_{xy}(0,\vec{P})\mathrm{d}\vec{P}. \end{aligned} \tag{266}$$

C'est pourquoi on aurait pu nommer cette séquence écho de spin 'soutenu' ou écho de spin 'réitéré' pour bien marquer ce qu'elle cherche à obtenir, un écho de spin classique répété indéfiniment. J'ai malheureusement utilisé dans les premiers temps le terme "non-CPMG", dans un sens générique qui incluait, dans mon esprit, tous les types de séquences qui cherchent à s'affranchir des contraintes *CPMG*. Depuis le terme "non-CPMG", un peu négatif , est resté associé à la séquence.

Nous pouvons déjà, à partir des spécifications du comportement du signal (266) aborder comment l'image de l'objet doit être reconstruite. Car oui, et il faut insister, on ne peut pas reconstruire une séquence écho de spin réitéré comme une écho de spin rapide.

1.4. Reconstruction d'un écho de spin réitéré. D'après les expressions (266) si l'on n'avait qu'un seul point dans l'image, on pourrait facilement séparer la partie réelle de l'aimantation initiale de sa partie imaginare ; l'une envoie un signal constant, l'autre envoie le signal oscillant à la pulsation réduite $\Omega = \pi$ (changement de signe entre chaque acquisition). Le problème est qu'il faut, dans le cas de l'imagerie, encoder l'objet. Et dans une acquisition normale l'encodage de gradient fait en sorte que d'une acquisition à l'autre l'aimantation en bord de champ de vue émette justement le signal de pulsation $\Omega = \pi$! Il y aura donc ambiguité entre une aimantation en quadrature au centre du champ de vue et une aimantation en phase sur le bord du champ de vue. On peut arguer que, si ces deux signaux sont à la même fréquence, ils sont cependant discernables par leur phase, puisqu'ils sont en quadrature. Oui, mais s'il y a par ailleurs une erreur de phase de 90° sur la chaine de reception, les deux signaux sont cette fois ci définitivement indiscernables ! Plus mathématiquement il faut consolider les équations (266) sous la forme, où $\varphi(\vec{P})$ la différence locale entre champ d'émission et champ de réception,

$$\begin{aligned} S(2l) &= k(\theta)\int e^{j\varphi(\vec{P})}M_{xy}(0,\vec{P})\mathrm{d}\tilde{\mathrm{P}} \\ S(2l+1) &= k(\theta)\int e^{j\varphi(\vec{P})}M^{*}_{xy}(0,\vec{P})\mathrm{d}\tilde{\mathrm{P}}. \end{aligned} \tag{267}$$

S'il y a deux antennes, la phase $\varphi(\vec{P})$ peut facilement varier de 90° ente le centre et le bord du champ de vue, rendant la séparation des deux positions impossible. Un effet identique peut être dû à un résiduel de courant de Foucault sur l'axe d'encodage. C'est pour la même raison qu'on ne peut pas conjuguer les signaux reçus une fois sur deux et les utiliser dans une reconstruction normale, en changeant si nécessaire le signe du vecteur d'onde $\vec{k}$, comme préconisé par J. Pipe [**120**]. Il faut bien noter par ailleurs qu'il ne sert à rien de connaître la phase $\varphi(\vec{P})$ pour essayer de corriger l'erreur après l'acquisition. La seule

procédure robuste est d'accepter d'acquérir chaque valeur de l'encodage deux fois de suite, puis d'additionner et soustraire les deux signaux pour isoler la réponse de la partie réelle et la réponse de la partie imaginaire de l'aimantation à l'écho zéro. Mathématiquement,

$$\begin{aligned}(S(2l)+S(2l+1))/2 &= k(\theta)\int e^{j\varphi(\vec{P})}M_x(0,\vec{P})\mathrm{d}\vec{P}\\ (S_{xy}(2l)-S_{xy}(2l+1))/2j &= k(\theta)\int e^{j\varphi(\vec{P})}M_y(0,\vec{P})\mathrm{d}\vec{P}.\end{aligned} \tag{268}$$

Ces deux réponses sont certes toujours entachées de l'erreur de phase $\varphi(\vec{P})$ mais pour chacune de ces deux quantités on est en face du problème de la reconstruction d'une fonction réelle modulée par un facteur de phase lentement variable dans l'espace, problème qu'on sait résoudre depuis plus d'une décennie par reconstruction homodyne [**121**]. Une telle reconstruction nécessite seulement l'acquisition d'un demi-plan de transformée de Fourier (*k-space*) auquel on ajoute quelques lignes de l'autre demi-plan de façon à pouvoir identifier et corriger l'erreur de phase. Dans le cas présent, puisque deux telles acquisitions et reconstruction sont réalisées, on acquiert au total l'équivalent d'un plan complet de transformée de Fourier, additionné de quatre à dix lignes pour la correction de phase φ. Or, acquérir un plan total de Fourier parait normal puisqu'on cherche à reconstruire un objet complexe.

1.5. Modulation Quadratique en tant système stationnaire. L'utilisation d'une modulation quadratique est une vieille histoire en *RMN*, comme nous l'avons vu à propos des impulsions sélectives. Cependant dans le cas d'un train discret de *RF* tout n'a pas été dit et l'article [**119**] présente certains résultats simples et d'importance que je vais survoler ici. Ainsi la première obervation que l'on note lorsqu'on applique à la phase d'émission φ_x une modulation de phase quadratique de forme générale (i est le numero d'ordre de l'impulsion)

$$\varphi_x(i) = 2\pi\frac{n}{d}i^2, \tag{269}$$

est qu'on obtient à la fin de chaque cycle, une refocalisation quasi parfaite ! C'est à dire tous les d impulsions, on a pratiquement une rotation de π si d est impair ou 2π si d est pair. Ceci est d'autant plus vrai que, à angle de refocalisation donné θ, le cycle d est grand, et plus précisément que la déposition d'énergie sur le cycle $d\theta^2$est grande : en pratique, si θ est exprimé en tour, $d\theta^2$ doit être de l'ordre de 1. On obtient donc ainsi ce que Murdoch [**122**] a appelé l'année suivant ma publication [**119**] des 'échos extrêmes'. Pourquoi pas ? Le terme est un peu pompeux mais connaissant l'humour de l'auteur on peut sans doute y discerner une pique amicale en direction des 'hyper-échos' de Jurgen Hennig.

Ce n'est cependant pas le fait qu'il y ait possibilité, si le cycle est assez long, de générer des échos parfaits qui va directement nous intéresser mais la possibilté d'obtenir des signaux présentant un régime stationnaire. Cette possibilité avait déja été utilisée par Zur [**117**] pour obtenir un régime stationnaire avec une modulation *RF* non stationnaire car quadratique ! En fait comme il est montré dans l'article [**119**] une modulation quadratique correspond à un système stationnaire si on augmente le vecteur d'état. Ce système stationnaire a un

ensemble de vecteurs propres et valeurs propres. On notera que l'article [**119**] utilise les spineurs commme représentation des rotations et les valeurs propres cherchées sont dans ce cas j et $-j$, mais l'article aurait fort bien pu être écrit à partir des aimantations et des équations de *Bloch* et alors les valeurs propres intéressantes sont 1 et -1. En effet nous aimerions arriver à avoir, partant d'une aimantation le long de l'axe x un signal constant (valeur propre 1), alors que si l'aimantation initiale est le long de y nous voudrions obtenir un signal changeant de signe à chaque écho (valeur propre -1). Il suffit donc, par une préparation, d'amener la condition initale $\vec{x}$ ('en phase') sur le vecteur propre de système ayant la valeur propre 1 et la condition intiale $\vec{y}$ ('en quadrature') le long du ou d'un des vecteurs propres correspondant à la valeur propre -1, si tant est que 1 et -1 sont des valeurs propres du système. Or c'est justement le fait qu'on ait des 'échos extrèmes' avec une rotation de cycle de π pour d impair et 2π pour d pair qui permet d'affirmer qu'il en est bien ainsi, que 1 et -1 sont valeurs propres. La construction des vecteurs propres, en terme d'aimantations ou de spineurs, est assez simple et malgré l'apparente difficulté mathématique s'écrit en quelque dizaines de lignes de code (en Matlab), car la réponse pour toutes les fréquences se déduit de la réponse à une fréquence particulière, par exemple $\omega = 0$, par une permutation circulaire. Ceci ne garantit cependant pas que l'amplitude des signaux soient les mêmes pour la condition initiale 'en phase' et la condition initiale 'en quadrature', ce qu'exige la reconstruction. Comme dans le cas de l'article de *Zur* [**117**], on a cherché le coefficient de balayage n/d optimisant cette condition. Ce qui n'est pas dit dans l'article (car non encore trouvé à l'époque) est qu'on obtient des signaux d'amplitude identiques lorsque n et d sont des membres d'une suite de Fibonnacci.

2. Quelques exemples d'application

La séquence *nCPMG* et sa reconstrucrion ont été testées à ce jour essentiellement en diffusion sur le rachis [**123, 124**] et [**125**] (voir aussi les figures (1)(2)), le nerf optique [**126**], mais les applications pourraient être multiples, comme par exemple la mesure de température présentée dans [**127**]. On note que, au moins en ce qui concerne la diffusion, l'acquisition doit se faire pour l'instant en acquisition mono tir ('single shot') pour éviter la sensibilité au mouvement et c'est pourquoi la résolution est très réduite, avec typiquement des images de résolution $128x64$. L'étape suivante consistera donc à coupler l'acquisition reconstruction avec une des techniques multicanaux tel que SENSE [**128**] ou en rendant l'acquisition multi-tirs avec auto-navigation suivant la technique PROPELLER [**126**] ou une technique équivalente.

L'autre voie de progression est dans l'élaboration d'une mise en état d'équilibre dynamique plus générale. A ce jour la suite des phases de la période de stabilisation sont déterminés par recherche d'optimum paramétrique (on note que l'algorithme *SLR* est totalement impuissant dans ce cas), et ne donne des résultats satisfaisants que pour des angles de nutation supérieure à 120°. Or, ne pas pouvoir diminuer l'angle de nutation rend l'utilisation de ce type de séquence très inefficace au dessus d'un champ de 1.5 *Teslas*. Plus précisément la séquence étant à déposition d'énergie contrainte, on n'augmente pas le signal à bruit en

passant d'un champ central de 1.5 *Teslas* à un champ central de 3*Teslas*. En sens inverse cependant, on pourra décider, étant à 3 *Teslas* que l'utilisation de *nCPMG* est encore plus nécessaire, la sensibilté d'*EPI* à la susceptibilté magnétique étant alors exacerbée.

3. Conclusion

J'ai tenu à présenter ce développement de la séquence non CPMG, car c'est sans doute le travail le plus difficile auquel je me sois attaqué récemment. Mais le lecteur aura compris que malgré quelques résultats cliniques, la technique est encore en gestation et d'avenir incertain. Le peu d'intérêt rencontré chez les développeurs (à part peut être [**122**]) ne m'empêche pas de continuer à investir sur ce type de séquence, car les retombées peuvent être importantes [**111**] . Il faut bien avouer aussi que, en dehors de tout aspect pratique, le problème n'est pas inintéressant sur le plan mathématique et rappelle, par son vecteur d'état étendu et la considération d'une excitation périodique (de longeur d), le formalisme de Floquet [**129**][**4**] .

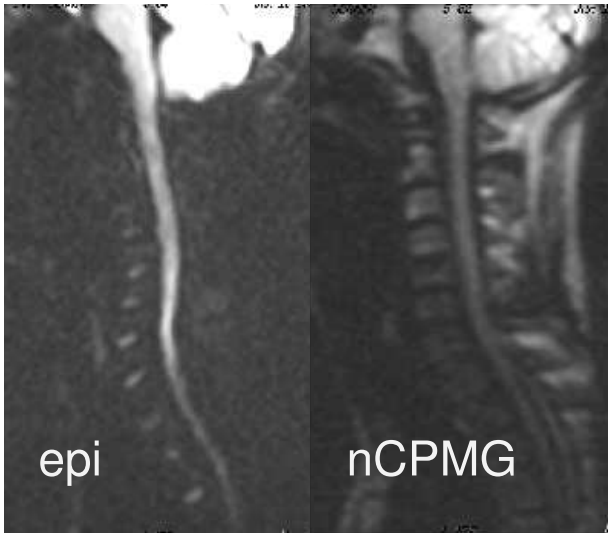

FIG. 1. (Images reproduites avec l'autorisation du Docteur Isabelle Klein, Hopital Bichat, Paris) Comparaison d'une acquisition de diffusion en utilisant EPI (echo planar imaging) à gauche et non-CPMG à droite. Ne sont montrées que les images pondérées en diffusion. On note les distorsions géométriques de la séquence EPI ainsi que la perte de signal dans l'os.

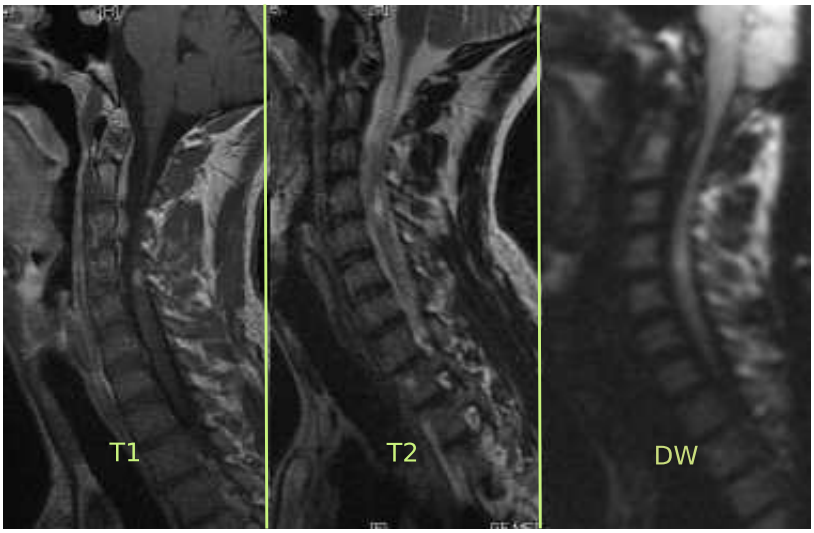

FIG. 2. (Images reproduites avec l'autorisation du Docteur Isabelle Klein, Hopital Bichat, Paris) Cas de sclérose en plaque acquis à droite par la sequence nCPMG pondérée en diffusion. On note la faible résolution de l'image de diffusion due à son caractère mono-tir qui restreint l'acquisition à une matrice $128x64$. On distingue aussi, sur le bord droit de l'image, la bande de transition des saturations très sélectives à phase quadratique introduites au chapitre précédent et utilisées pour restreindre le champ de vue.

Annexe : Reproduction de J. Mag. Res. 155

Journal of Magnetic Resonance **155,** 278–292 (2002)
doi:10.1006/jmre.2002.2523, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Non-CPMG Fast Spin Echo with Full Signal

Patrick Le Roux

General Electric Medical Systems, Marketing IRM, 283 rue de la Miniere, 78530 Buc Cedex, France

Received October 31, 2001; revised February 28, 2002

The standard Fast Spin Echo sequence used in MR imaging relies on the CPMG condition. A consequence of this condition is that only one component of the transverse magnetization can be measured. To counter this, some phase modulation schemes (XY, MLEV . .) for the pulse train have been proposed, but they are useful only over a very restricted range, close to π, of the refocusing pulse rotation angle. Some other solutions not relying on phase modulation have also been suggested, but they destroy one half the available signal. Revisiting the phase modulation approach, J. Murdoch ("Second SMR Scientific Meeting," p. 1145, 1994) suggested that a quadratic phase modulation could generate a train of classical echoes. We show here that indeed a quadratic phase modulation has a very suitable property: after an adequate change of frame, the dynamic of the system composed of all the protons situated in one pixel can be seen as stationary. If the parameter of the quadratic phase modulation is well chosen, it is then possible to put the dynamic system in a combination of two suitable states and obtain a signal identical to the signal of a classical spin echo, at least for nutation of the refocusing pulse higher than, approximately, two radians. © 2002 Elsevier Science (USA)

Key Words: **spin echo; Carr, Purcell, Meiboom, Gill; quadratic phase modulation.**

1. INTRODUCTION

1.1. Aim and Context of This Work

The Fast Spin Echo (FSE) sequence, or RARE (*1*), relies on the CPMG (Carr–Purcell–Meiboom–Gill) conditions (*2*) for generating a long train of spin echoes even when the rotation angle θ of the refocusing pulses is not equal to π. One of these conditions states that the initial magnetization after the excitation pulse must be aligned with the axis of the refocusing pulses. Any component of the magnetization perpendicular to this ideal direction is destroyed very rapidly after some echoes, as is depicted in Fig. 1. This figure demonstrates that the fast spin echo is very different from the classical Spin Echo experiment in which one component of the initial magnetization is maintained constant, while the perpendicular component alternates in sign with each echo.

This has some important practical consequences: procedures which rely on an auxiliary phase encoding, such as flow encoding and chemical shift separation, are not feasible with FSE. Other procedures such as diffusion weighting or T_2^* contrast, in which a parasitic phase modulation appears due to eddy currents, patient movement, or susceptibility effects, are also difficult to perform with FSE.

In the past decade, the MR imaging community has developed two related solutions to this problem (*3, 4*). The drawback of both solutions is that they give up, by principle, one half of the signal. Indeed as explained in Norris *et al*. (*3*), the sensitivity to the initial phase may be explained by the fact that the echo signal can be seen as the addition of two equal magnitude signals, with a phase which is equal to the phase of the initial magnetization for one signal, and opposite to that for the other signal. The Norris solution consists in eliminating, for instance by crusher gradients, one of these signals, resulting in an echo signal whose magnitude is indeed independent of the initial phase, but which is only one half of the signal obtainable when the CPMG condition is fulfilled. The Alsop solution (*4*) is more involved and reduces the signal oscillations which appears, in addition to the signal loss, in the Norris solution. But here, once again, one half of the pathways are discarded.

However, before that, Maudsley (*5*) and Guillon *et al*. (*6*) had a more ambitious target and tried to obtain a high, stable signal for both components of the initial magnetization. They used modulation schemes with pulses along the x and y axis (hence the generic name "XY" of these modulations) in a sequence determined by a recursive expansion procedure similar to the procedures developed for generating decoupling sequences. Unfortunately even the most sophisticated of these schemes cannot compensate for a large error of the refocusing pulse rotation angle. More recently, Murdoch (*7*) suggested that a quadratic phase modulation can act to preserve echo intensity in a spin-echo sequence.

We have explored this route (*8*) and applied it in practice (*9*). We want here to justify theoretically the use of a quadratic phase modulation. This was already presented (*10*), but the subject probably needs a more detailed explanation. Stated without too much mathematics, the theory relies on the equivalence of a quadratic phase modulation to a linear frequency sweep, a well-known principle in signal processing. Then, translating the coordinates at the same speed as this frequency sweep, one obtains a *stationary system*. This stationary system can be decomposed along its eigenvectors. If we can put the system state into the subspace spanned by the eigenvectors corresponding to certain

1090-7807/02 $35.00
© 2002 Elsevier Science (USA)
All rights reserved.

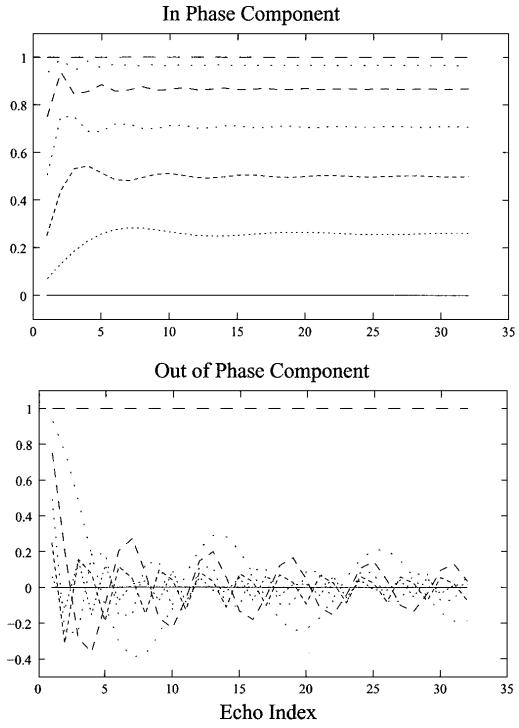

FIG. 1. Evolution of the transverse magnetization during a CPMG experiment, for echo number i ranging from 1 to 32 and rotation angle θ of the refocusing pulse varying from 0 to 180° with a 30° step. At the end of the excitation pulse, or echo number 0, the magnetization is assumed to have a magnitude of 1. At top, the initial magnetization is along the axis x of the refocusing pulse: the signal tends toward $\sin(\theta/2)$. At bottom, the initial magnetization is along y; for clarity, the magnetization has been multiplied in this case by $(-1)^i$.

eigenvalues (1, −1 in the classical O_3 representation, or $j, -j$, with $j = \sqrt{-1}$, in the spinor or SU_2 representation) we obtain some similarity with a classical spin-echo experiment. The signal is composed only of one constant part and one alternating part. These two signals have large and equal magnitude only for certain values of the frequency sweep rate. We give these values. We also determine a small phase sequence for the first few refocusing pulses which puts the system in the appropriate subspace. This gives the desired results down to a refocusing angle of 115°, i.e., far below what is possible with other known phase modulations. The reader primarily interested in the practical aspect of this work, rather than the mathematical basis, should read up to section "Setting the Receiver Phase" (Subsection 2.2), with Fig. 3 and then jump to the Subsection 3.6 "Resulting Optimal Phase Modulation."

1.2. Overview of the Work

Section 2 is devoted to the description of a train of echoes when the phase of the refocusing pulses varies according to an arbitrary law; after some preliminaries needed to define the action of crushing present in any fast spin echo sequence (Section 2.1) we answer the very practical question of how to set the receiving phase when the emission phase is varying (Section 2.2) and find that we can make the equations depend not on the emission phase itself but only on its first order difference (Section 2.3). In other words, we transform a phase modulation into a frequency modulation. But observing the system in a translating frame one can furthermore make the equations depend on the second order difference of the emission phase. Section 3 is devoted to the particular case of a quadratic phase modulation; because such a modulation has a second order difference which is constant, the equations describing the system dynamics become stationary (Section 3.1). Subsection 3.2 shows how to calculate the eigenfunctions of such a stationary system. In that subsection we do not choose a representation for the elementary rotations, but rather treat them as symbolic operators. To perform numeric computation we have the choice between the O_3 representation (our classical 3D space) or the SU_2 group where a rotation is expressed by two complex numbers. We prefer, here, this last and more compact solution and Subsection 3.3 describes the computation of the eigenfunctions of the stationary system in this representation. This task is performed in Subsection 3.3.2, after a succinct reminder of the SU_2 (or Quantum Mechanics) formalism in Subsection 3.3.1. In Subsection 3.3.3 we remined that the eigenfunctions being a complete orthogonal function basis, we can always express the system state in this basis. We are now in position, in Subsection 3.4, to tackle the problem on hand: obtaining a signal behavior similar to the perfect refocusing case even when the nutation angle is not π. We show that for obtaining this behavior, we must put the system in the subspace spanned by two eigenfunctions only. We show in Subsection 3.4.2 that this is the case for a perfect π pulse for which the initial flip pulse puts the system directly along the eigenfunction relative to the eigenvalue $-j$. Then, in case of a spurious phase introduced between the excitation pulse and the RF refocusing pulse train, we show that the system state stays in the subspace spanned by the two eigenfunction $j, -j$. In the next subsection, 3.4.3, we simply suppose that, in the absence of spurious phase, we have been able, after a preparation period lasting some echoes, to put the system state along the $-j$ eigenfunction, even when the nutation angle of the refocusing pulses is not π. Then, again, the system state will be in the subspace of eigenfunctions relative to $j, -j$, whatever the spurious dephasing introduced between the flip pulse and the train of echoes. But an eigenfunction is always defined up to an arbitrary phase only. We must choose this phase. In the next subsection, we take interest in the signal generated (this step would not have been necessary if we had used the O_3) and find out that the signal is composed of one constant part and one alternating part, the proportion between the

two parts depending on the spurious phase introduced between the excitation pulse and the echo train. But if the constant part is given, the alternating part magnitude is dependent on the $-j$ eigenfunction phase factor. We maximize that alternating part, now entirely fixing the system state we will use as a target for the preparation period. But before embarking into that, we have still another parameter to determine: the second order finite difference of the quadratic phase modulation. That is the aim of Section 3.4.6, where we obtain this parameter by scanning a large set of possible values. It then suffices to determine the preparation period. This is presently done by a classical optimization programs, with a cost function defined in Section 3.5, the results of which are presented in Section 3.6 in the form of seven emission phase angles to apply to the first seven refocusing pulses. Section 4 gives an overview of the reconstruction process used in single shot acquisition. Section 5, Experimental Results and Discussion, summarizes the success but also the weakness of the present solution, and suggests some future developments.

2. REPRESENTATION OF A PHASE MODULATED SPIN-ECHO

2.1. Preliminary Remarks

Figure 2 shows the typical sequence that we will use. Only the excitation block and the first echo space (from the first refocusing pulse to the next) is shown; the subsequent echo spaces are repeated identically to the first echo space, except, perhaps, for the encoding gradient lobes which vary. As can be seen, we do not make any change to the classical CPMG imaging sequence. Particularly, the integral of the gradients are kept equal on each side of the refocusing pulse, generating an echo at the middle of the echo space. As usual the exception to this symmetrical waveform is found on the phase-encoding direction where the phase-encoding lobe is compensated by an opposite lobe just before the next refocusing pulse. We denote by $2T$ the duration of one echo space. We call reference time, and also "echo 0," the position in time situated T before the center of the first refocusing pulse. In a standard CPMG experiment it is here that the center of the excitation pulse should be placed in order to eliminate the influence of the main field inhomogeneity ΔB_0. The depicted sequence is a T_2^* experiment and the period separating the center of the excitation pulse from the reference time has been elongated, giving at echo zero an unknown phase modulation of the object, denoted by χ. In other types of contrast, the phase modulation χ can be due to many other phenomena: for instance patient movement during a diffusion preparation inserted between the excitation pulse and the reference time. This phase modulation amounts to several 2π turns over the imaging volume, and thus the CPMG condition is violated completely resulting in a null signal at several positions in the volume.

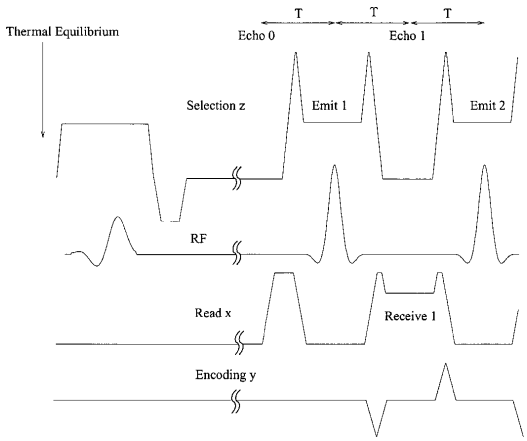

FIG. 2. The kind of sequences considered here. Nominally the center of the excitation pulse coincides with the reference time and the sequence is identical to the CPMG sequence, with gradients and B_0 integrals matching on each side of a refocusing pulse. Depicted here is the example of a T_2^* acquisition, where the time between the excitation pulse and the reference time has been elongated, resulting in an uncontrolled phase at the reference time. The rest of the sequence is not altered in any way, except that each refocusing pulse is emitted with a varying reference phase.

We call K_x, K_z the integral of the gradients from the center of a refocusing pulse to the center of the subsequent read period, multiplied by γ the magnetogyric ratio (without any sign). We could add also a K_y integral, if a constant crusher lobe, in addition to the phase-encoding lobes, were to exist on the y axis. For a given geometric position, these gradient integrals induce, between the center of a refocusing pulse and the following echo, a precession ω that we can express in radians by

$$\omega(x, y, z) = K_x x + K_y y + K_z z + \gamma \Delta B_0(x, y, z) T. \quad [1]$$

Despite the fact that ω in this equation is an angle, we may take the liberty to call it a resonant angular frequency or even resonant frequency. This is to be understood as a resonant angular frequency which would give that angle of precession if applied continuously in the time unit T.

The gradient of the function $\omega(x, y, z)$ defines at each point a direction of crushing (which is, for large crusher gradients, virtually aligned with $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)^t$), and also a local crushing wavelength λ_c corresponding to a phase variation $\delta\omega$ of 2π. Apart from regions where the gradient of the main magnetic field becomes significant, this crushing wavelength is not very different from $\lambda_c = 2\pi/|K|$. The crusher gradients are adapted such that the crushing wavelength is small enough in comparison to the resolution of the image and the slice thickness. A ratio of one half between the crushing wavelength and the resolution is generally considered necessary. Also, as is usual when imaging a phased object, one must suppose that the phase modulation, $\chi(x, y, z)$ in our case, is not varying too fast in the length of one resolution, otherwise this phase modulation would induce, in

the reconstructed image, a magnitude modulation as well. The crushing wavelength being smaller than the resolution, one then admits that at the time of echo zero, the magnetization is slowly varying in the scale of a crushing wavelength.

We intend to obtain, in spite of the phase χ, and although the refocusing angle θ is not π, a sequence of echoes in which one component of the initial transverse magnetization generates a constant signal, whereas the other perpendicular component gives an alternating signal. We note that this is possible because the echo signal is proportional to the *average*, over one crushing wavelength, of the transverse magnetization. One can thus imagine a distribution of the magnetization inside one crushing wavelength which on average mimics the behavior of a standard spin-echo with a π refocusing pulse, but of course with a reduced signal. We intend to realize this by phase modulating the train of refocusing pulses.

2.2. Setting the Receiver Phases

When varying the emission phases, i.e., the phase of the carrier during the RF pulses, the first question which arises in practice is how to set the phase of the carrier during the acquisition period. In Fig. 3 the phase of the first refocusing pulse is denoted ϕ_{x1}, the second one ϕ_{x2}, and so on. We suppose, for the moment, these emission phases to be given, and remark that these phases, with the addition of the initial phase χ of the magnetization, determine entirely the evolution of the magnetization in the subsequent echoes (for a constant rotation θ of the refocusing pulse). Hence the determination of the receiver phases which follows has the aim of rendering the expression for the received signal as simply as possible. We denote by ϕ_{r1} the carrier phase setting during the first read period (echo 1), ϕ_{r2} the phase during the second read period and so on. And, although there is no signal sampling at that time, we define a reference receiver phase ϕ_{r0} at echo 0. We would like (in the case of the nominal refocusing angle of π) the dynamics of the magnetization seen in the receiver frame to be simply the same as when no phase modulation is used, i.e., one component of the magnetization staying the same, the other one changing sign every other echo. This is realized, after arbitrarily setting the direction ϕ_{r0} of the magnetization elected to stay constant in the new frame, if we follow that magnetization under the influence of the successive π pulses. This readily fixes the set of receiver phases by

$$\frac{\phi_{r\,i} + \phi_{r\,i-1}}{2} = \phi_{x\,i}. \qquad [2]$$

Of course if the emission phases ϕ_x are given, the arbitrariness with which we can choose the initial receiving phase ϕ_{r0} presents a difficulty; one can add any sequence $\phi_{r0} \times (1, -1, 1, \ldots)$ to the receiving phase sequence. To solve this ambiguity one can try to eliminate or minimize that oscillation. In practice though, we will take as the driving quantity not the emission phases but the angle separating one acquisition phase from the next emission phase, which we note δ_i, and use this quantity to generate the two other phases (see Fig. 3). Hence

$$\phi_{x\,i} = \phi_{r\,i-1} + \delta_i, \qquad [3]$$

and

$$\phi_{r\,i} = \phi_{x\,i} + \delta_i. \qquad [4]$$

The only arbitrariness left is a constant phase ϕ_{r0} that we can add to both the ϕ_x and the ϕ_r. This is not relevant as it is just a change of the phase of the central carrier. The other advantage of using δ_i is that it can be merged with the rotation ω, as we see now.

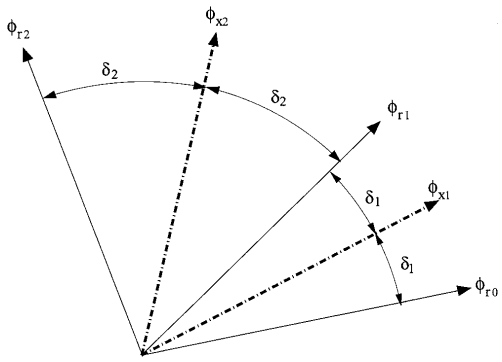

FIG. 3. If the phase of emission of each refocusing pulse is given, how should one set the phase of the receiver during each receive period? Such that, if the rotation angle of the refocusing pulse were π, an initial magnetization aligned with a chosen direction would generate a constant signal for every subsequent echoes.

2.3. From Phase Modulation to Frequency Sweep

In this subsection we write the rotation from one echo to the next in terms of symbolic rotation operators. $R_n(\phi)$ represents a rotation of angle ϕ around the unit vector (in the 3D space) $\vec{n}$, with some obvious notation like $R_z(\phi)$ representing a rotation around the axis z. We can restrict ourselves to taking a snapshot of the system at the echo time. From that knowledge we can deduce, by simple precession, the state at any moment of the echo space, up to just before or just after the RF pulses, which themselves are assumed to be applied instantaneously.

At a given position in space, at resonant angular frequency ω along the crushing direction, and between echo $i-1$ and emission i, the magnetization undergoes a rotation around z: $R_z(-\omega)$, seen in the central rotating frame. The minus sign comes from the fact that we are here considering protons, and we defined ω as a function of an unsigned magnetogyric ratio. But if we place ourselves in a frame with a reference axis (say x) aligned

with the reception reference axis at echo $i-1$ and then with the emission reference axis at the center of pulse i, we see the magnetization rotating by $R_z(-\omega-\delta_i)$. Identically, and still viewing the magnetization in the new rotating frame whose axis x stays aligned with the emission and reception reference axis, the rotation undergone by the magnetization between emission i and echo i is: $R_z(-\omega-\delta_i)$. That leaves us with the characterization of the rotation induced by the RF emission when it is seen in a frame whose axis x is aligned with the B_1 field. Naively one is tempted to say that the rotation is $R_x(\theta)$. But one can argue that, the RF pulse being selective, this is only true at the center of the slice. Particularly, away from this center the axis of the rotation is tilted toward the axis z. However one can answer that this effect can always be taken into account by applying the same rotation around z on each side of the pulse. That precession can be included in δ_i, or even in ω if it is a constant, which is the case if the RF refocusing pulse itself is not varied. So the native vision is exact. Hence the rotation from echo $i-1$ to echo i in the new rotating frame is

$$\begin{aligned} R_{i-1,i} &= R_z(-\omega-\delta_i)R_x(\theta)R_z(-\omega-\delta_i), \\ &= \hat{R}(\omega+\delta_i,\theta). \end{aligned} \quad [5]$$

In the last line of the equation we have written the echo to echo rotation in a way to emphasize the fact that the rotation is not a function of ω and δ_i separately but of $(\omega+\delta_i)$; i.e., it is a constant rotation

$$\hat{R}(\omega,\theta) = R_z(\omega)R_x(\theta)R_z(\omega), \quad [6]$$

translated along the resonant frequency axis, or crushing direction by $-\delta_i$. We will call the rotation $\hat{R}(\omega,\theta)$, whose center is by convention at $\omega=0$ where the gradients have no effect, the central rotation. Hence the rotation $\hat{R}(\omega+\delta_i,\theta)$ is the central rotation translated to $\omega=-\delta_i$.

2.4. One Step Further: The Sweep Velocity

Let $\vec{v}_i$ be the state of the system, at resonant angle ω, at echo i (this state can be for instance the magnetization, i.e., three real values, at each ω if we use the classical representation of rotations). From Eq. [5], one can write:

$$\vec{v}_i(\omega) = \hat{R}(\omega+\delta_i,\theta)\vec{v}_{i-1}(\omega), \quad i=1\ldots. \quad [7]$$

Let us define the quantity $\Omega_i=\omega+\delta_i$; this defines a new, translating, frame whose origin $\Omega_i=0$ coincides at each echo i with the center $\omega=-\delta_i$ of the rotation $\hat{R}(\omega+\delta_i,\theta)$. Then, let us apply a change of variable to try to express all quantities in terms of Ω_i.

For that let us first pose the following:

$$\vec{v}_0(\omega) = \vec{w}_0(\omega),$$

and

$$\vec{v}_i(\omega) = \vec{w}_i(\omega+\delta_i) = \vec{w}_i(\Omega_i), \quad i=1\ldots. \quad [8]$$

To be able to use Eq. [8] for $i=0$, we will have to set $\delta_0=0$. Applying this change of variable to Eq. [7] one obtains

$$\vec{w}_i(\Omega_i) = \hat{R}(\Omega_i)\vec{w}_{i-1}(\Omega_i-\delta_i+\delta_{i-1}), \quad [9]$$

where we see that only the first difference $\Delta_i=\delta_i-\delta_{i-1}$ of the δ intervenes. We consider now Ω_i to be the independent variable in place of ω, and we replace the notation Ω_i by Ω

$$\vec{w}_i(\Omega) = \hat{R}(\Omega,\theta)\cdot S(\Delta_i)\vec{w}_{i-1}(\Omega), \quad [10]$$

where

$$\Delta_i = \delta_i-\delta_{i-1}, \quad i=2\ldots, \quad [11]$$

and

$$\Delta_1 = \delta_1; \quad [12]$$

after having defined $S(\Delta_i)$ as the translation operator by Δ_i. We will preferably use Eq. [10] rather than Eq. [7]. Indeed, being given $(\phi_{r0}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\ldots)$ is equivalent to being given $(\phi_{r0}, \delta_1, \delta_2\ldots)$. Also, the signal at an echo time is the average value of the transverse magnetization over one crushing wavelength, and thus it is the same whether it is calculated from $\vec{v}_i$ or $\vec{w}_i$, these two values being only a translation from each other (and periodic with a period of one crushing wavelength). So we can directly use $\vec{w}_i$ to calculate the signal at echo i and can forget $\vec{v}_i$ altogether.

3. QUADRATIC PHASE MODULATION

3.1. A Stationary System

Let us try a constant sweep velocity $\Delta_i=\Delta$. Using Eqs. [11], [3], and [4] gives $\delta_i=\Delta i$, $\phi_{r\,i}=\Delta i(i+1)$, $\phi_{x\,i}=\Delta i^2$. Let us change Δ_1 and take for instance $\Delta_1=\Delta+\delta$; this gives $\delta_i=\Delta i+\delta$, $\phi_{r\,i}=\Delta i(i+1)+2\delta i$, $\phi_{x\,i}=\Delta i^2+(2i-1)\delta$. Finally, we can change ϕ_{r0} to add an identical constant to all phases. Hence we can simulate the action of any quadratic modulation of the emitter phases, with our three parameters Δ, Δ_1, ϕ_{r0}.

In all cases, at least after the first echo ($i>1$), when we place ourselves in the frame translating at a constant rate $-\Delta$ between each echo, $\Omega=\omega+\Delta i$, we obtain a system in Eq. [10] which is stationary,

$$\vec{w}_i(\Omega) = [\hat{R}(\Omega,\theta)\cdot S(\Delta)]\,\vec{w}_{i-1}(\Omega). \quad [13]$$

3.2. Constructive Definition of Eigenvectors

Having in hand a stationary system, it is natural to try to represent it by its eigenvectors. Let us try to build one eigenvector $\vec{u}$ corresponding to a given eigenvalue λ (supposing we know the set of eigenvalues). One must realize that Eq. [13] corresponds to a dynamic system with very large dimensions, and we will rather use the term eigenfunction rather than eigenvector. Let us choose one particular frequency Ω_0 and suppose that the eigenfunction at that point is $\vec{u}(\Omega_0)$. This is a three-dimensional real vector if one works with magnetization (O_3 formalism), but will be a two-dimensional complex vector if we use spinors (SU_2 formalism). In this subsection we do not yet make the choice between the two representations. How will $\vec{u}(\Omega_0)$ be transformed by Eq. [13] at the next echo? First, it will be translated by Δ, hence it will be now seen at position $\Omega_1 = \Omega_0 + \Delta$; then it will undergo the rotation $\hat{R}$ at that position, becoming $\hat{R}(\Omega_1)\vec{u}(\Omega_0)$. But, by definition of an eigenfunction relative to an eigenvalue λ, the new value of the state vector at that position Ω_1 should be equal to $\lambda\vec{u}(\Omega_1)$. Hence we must have

$$\lambda\vec{u}(\Omega_1) = \hat{R}(\Omega_1)\vec{u}(\Omega_0). \quad [14]$$

After dividing this equation by λ, one is able to determine the value of the eigenfunction $\vec{u}(\Omega_1)$, at $\Omega_1 = \Omega_0 + \Delta$, if its value at Ω_0 is known. But continuing the same procedure one can find its value at $\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta$, and so on. Thus all the values of the eigenfunction situated on the "comb" of frequencies

$$\Omega_l = \Omega_0 + l\Delta \quad [15]$$

can be deduced from $\vec{u}(\Omega_0)$, by

$$\vec{u}(\Omega_l) = \frac{1}{\lambda^l}\mathcal{R}_l\vec{u}(\Omega_0); \quad [16]$$

with the definitions

$$\mathcal{R}_l = \mathcal{R}(\Omega_l) = \hat{R}(\Omega_l)\hat{R}(\Omega_{l-1})\ldots\hat{R}(\Omega_1); \quad [17]$$

or, in recursive form,

$$\mathcal{R}(\Omega_l) = \hat{R}(\Omega_l)\mathcal{R}(\Omega_{l-1}). \quad [18]$$

Let us now suppose that Δ is restricted to be a rational number,

$$\Delta = 2\pi\frac{n}{d}; \quad [19]$$

with n and d two integers without common divisor. Hence the successive frequencies of the comb defined in Eq. [15] become

$$\Omega_l = \Omega_0 + 2\pi\frac{n}{d}l, \quad [20]$$

with the remark that the integer nl in the above equation is to be taken modulo d. The integers generated by $k = nl\ (d)$ span in a one to one manner the set of integer $1\ldots d$. Notice also that the sequence is cyclic, with period d. So after having applied our previous procedure d times, $k = nl$ has spanned the whole set of d values $k = 1\ldots d$, and for $l = d$ the corresponding frequency Ω_d is again equal to Ω_0. Hence $\vec{u}_0$ is not arbitrary and must satisfy $\vec{u}(\Omega_d) = \vec{u}(\Omega_0)$:

$$\vec{u}(\Omega_0) = \frac{1}{\lambda^d}\mathcal{R}(\Omega_d)\vec{u}(\Omega_0). \quad [21]$$

We will call $\mathcal{R}(\Omega_d)$ the "cycle rotation." It is indeed the rotation undergone by the particular magnetization situated at the resonant frequency $\omega = \Omega_0$ during one whole cycle of d successive rotations. $\mathcal{R}_d$ is a 3×3 real orthogonal matrix in the O_3 formalism or a unitary 2×2 complex matrix in the SU_2 formalism. From Eq. [21] one deduces that $\vec{u}(\Omega_0)$ must be one of the eigenvectors of $\mathcal{R}_d$. Let μ be one of the eigenvalues of this matrix ($|\mu| = 1$), and $\vec{u}_\mu$ its associated eigenvector. Equation [21] implies $\lambda^d = \mu$. From μ we thus can generate d different possible eigenvalues of the system in Eq. [13],

$$\lambda_m = (\mu)^{1/d}e^{j\frac{2\pi}{d}m}, \quad m = 1\ldots d. \quad [22]$$

The corresponding eigenfunctions are calculated according to Eq. [16],

$$\vec{u}_{\mu,m}(\Omega_l) = \lambda_m^{-l}\mathcal{R}_l\vec{u}_\mu. \quad [23]$$

Hence the eigenfunctions of the system in Eq. [13] are easily constructed numerically, on the comb $\Omega_k = \Omega_0 + k\frac{2\pi}{d}$. One notes that, as usual, each eigenfunction is still undetermined by a global phase factor applied for instance to $\vec{u}_\mu$, but all the components $\vec{u}(\Omega_0 + 2\pi k/d)$, $k = 1\ldots d$ are now linked to each other. However the eigenfunctions on two different combs, each comb corresponding to a distinct reference frequencies $\Omega_0 \in [0, 2\pi/d]$, are independent of each other and could, in principle, be multiplied by two unrelated phase factors. We actually will set these phases such that the resulting function of Ω be the most continuous possible.

3.3. Computation of the Eigenvectors in SU_2

From this point on we will use the SU_2 formalism, which more efficiently carries the same information as the classical representation using magnetization (the O_3 approach).

3.3.1. Quick overview of the spinor formalism. The reader not proficient with the SU_2 formalism should consult a textbook on quantum mechanics (*11*), application of spinor or Cayley Klein (CK) parameters (*12, 13*), or even quaternions (*14*). We give here only the necessary notations. We use SU_2 matrices, denoted Q, and density (or vector) matrix denoted σ, of the

form, respectively

$$Q(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{bmatrix},\quad \sigma(z,X)=\begin{bmatrix}z & \bar{X}\\ X & -z\end{bmatrix}. \qquad [24]$$

The density matrix $\sigma(z, X)$ represents a vector in the classical 3D space with projection z along the z axis, and $X = x + jy$ projection in the x, y plane. Under a rotation this 3D vector is transformed into another vector z', X'. This rotation is expressed with a multiplication on the left by an SU_2 matrix and a multiplication on the right by the conjugate transpose of this SU_2 matrix

$$\sigma(z',X')=Q\sigma(z,X)Q^{*}. \qquad [25]$$

The most general rotation of angle Θ around an axis $\vec{n}$ whose coordinates along z and the xy plane are, respectively, n_z and $n_{xy}=n_x + jn_y$, is represented by $Q_n(\Theta)=Q(\mathcal{C} - j\mathcal{S}n_z, -j\mathcal{S}n_{xy})$ with $\mathcal{C}=\cos(\Theta/2)$ and $\mathcal{S}=\sin(\Theta/2)$. In this very general case, the explicit writing of the full SU_2 matrix, rather than the use of a notation Q may be more appropriate because, by separating the real part of the parameter α, one can highlight the vector matrix representing the axis of the rotation

$$Q_n(\Theta)=\mathcal{C}1 - j\mathcal{S}\sigma(n_z,n_{xy}). \qquad [26]$$

3.3.2. Spinor computation of the eigenvectors. We now represent all rotations in the SU_2 form and use the same notation for the symbolic operator and its SU_2 matrix expression (with, when it is necessary to define the parameters values, $Q(\alpha, \beta)$ being understood as a short cut for the full SU_2 matrix as defined by Eq. [24]). In SU_2 the central rotation defined in Eq. [6] and used in Eqs. [10], [13] is written

$$\hat{R}(\Omega,\theta)=\begin{bmatrix}ce^{j\Omega} & -js\\ -js & ce^{-j\Omega}\end{bmatrix}, \qquad [27]$$

with $c=\cos(\theta/2), s=\sin(\theta/2)$. Thus, each elementary rotation $\hat{R}(\Omega_l)$ in Eq. [17] is represented by $\hat{R}(\Omega_l)=Q(c\exp(j\Omega_l), -js)$.

Supposing that $\mathcal{R}_l$ is represented by a matrix $\mathcal{R}(\Omega_l)=Q(\alpha_l,\beta_l)$, its computation is performed recursively by the equivalent of Eq. [18] in spinor form. This way, we obtain the cycle rotation $\mathcal{R}(\Omega_d)$ in Eq. [21]. The diagonalization of $\mathcal{R}(\Omega_d)$ is easy: one begins by writing it in the form $\mathcal{R}(\Omega_d)=\mathcal{C}1 - j\mathcal{S}\sigma_V$; then the vector matrix σ_V is factored into $\sigma_V = U\sigma_z U^{*}$, with $\sigma_z=\sigma(1,0)$. One verifies immediately that the first column of U, which we denote $\vec{u}=[u, v]^t$, is the eigenvector of $\mathcal{R}_d$ with an eigenvalue $\mu=\mathcal{C} - j\mathcal{S}$; the second column of U (noted $\vec{u}_\perp$) is the eigenvector with an eigenvalue $\bar{\mu}=\mathcal{C} + j\mathcal{S}$. The detailed computation in terms of the CK parameters α_d, β_d of $\mathcal{R}_d$ is given in Appendix A. Further, we show in Appendix B, by using a polynomial representation (*15*) that, if d is odd, and for sufficiently high cycle energy

$$d\times\theta^2\gg 1, \qquad [28]$$

with θ, the rotation angle of the refocusing pulse, expressed in 2π turns, we have $C\simeq 0$. That means that the rotation angle of the cycle is close to π, and hence the eigenvalues are $\mu\simeq -j$ and $\mu\simeq j$. Note that one can demonstrate in a similar, but somewhat more involved, manner that if d is a large even number, the cycle rotation angle is 2π (transparent rotation). This case is not considered in this article any further, and from now on, d is supposed odd (the results for two consecutive d, hence odd and even, can be made similar; but the case d "even" necessitates dealing with degenerated eigenstates). From all the values of λ_m, or $\bar{\lambda}_m$ we chose the one which is the closest to $-j$. This implies choosing the eigenvector of the cycle rotation corresponding to $\mu=-j$ if $d=4q+1$, or to $\mu=j$ if $d=4q-1$. We still call $\vec{u}$ the corresponding cycle eigenvector, after eventually having made the necessary swap between the two column vectors $\vec{u}, \vec{u}_\perp$ of the matrix U. And then we choose $m=0$ in Eq. [22], and use Eq. [23] with $\lambda_m=-j$ to obtain the "main" eigenfunction that we denote $\vec{u}_{-j}(\Omega_l)$. We could similarly generate the eigenfunction $\vec{u}_j(\Omega)_l$, but it is easily found that the two vectors are deducible from each other as the two column vectors of an SU_2 matrix. For the rest of this article we will denote by $U_0(\Omega_l)$ the matrix composed of the concatenation of the two eigenfunctions (2D vectors) $\vec{u}_{-j}$, and $\vec{u}_j$, i.e., $U_0(\Omega_l)=[\vec{u}_{-j}\mid\vec{u}_j]$, or in terms of the individual scalar components of $\vec{u}_{-j}=[u_l, v_l]^t$,

$$U_0(\Omega_l)=[\vec{u}_{-j}\mid\vec{u}_j]=\begin{bmatrix}u_l & -\bar{v}_l\\ v_l & \bar{u}_l\end{bmatrix}. \qquad [29]$$

One could generate the other $2d-2$ eigenfunctions for $m\neq 0$ by multiplying $\vec{u}_{-j}(\Omega_l)$, and $\vec{u}_j(\Omega_l)$ with the scalar $\exp(-j\frac{2\pi}{d}ml)$ but, to keep a SU_2 matrix structure, it is logical to group together the two eigenfunctions corresponding to two eigenvalues which are complex conjugated to each other. All eigenfunctions can then be obtained, from U_0, by simple matrix multiplication,

$$U_m(\Omega_l)=U_0(\Omega_l)R_z\left(\frac{2\pi}{d}ml\right), \qquad [30]$$

for the values of $m=1\ldots d-1$.

Also each eigenfunction is determined with an arbitrary phase factor. By convention, and according to Appendix A, we choose the first component (u_0), of $\vec{u}_{-j}$, at the reference frequency of the comb Ω_0, to be real. We can then multiply the whole eigenfunction $\vec{u}_{-j}(\Omega_l)$ by a phase factor $\exp(-j\psi_0/2)$. By convention we then multiply $\vec{u}_j(\Omega_l)$ by $\exp(j\psi_0/2)$, such that the new $U_0(\Omega_l)$ is still a SU_2 rotation matrix.

3.3.3. Decomposition of the system state on the eigenfunctions. We are now in possession of $2d$ eigenfunctions by which we can express any distribution of $2D$ complex vector (spinor) distribution $\vec{w}(\Omega_l)$ on the d frequency point Ω_l; but again to maintain the SU_2 type of symmetry, we will prefer to say that we can decompose any SU_2 matrix distribution $W(\Omega_l) = [\vec{w}(\Omega_l) \mid \vec{w}_\perp(\Omega_l)]$ by

$$W(\Omega_l) = \sum_{m=0}^{d-1} U_m(\Omega_l)\Gamma_m. \quad [31]$$

Each "coefficient" matrix Γ_m is expressibly by two complex numbers $\Gamma_m = Q(\gamma_m, \sigma_m)$. In the following subsection we will consider $W(\Omega)$ to represent the rotation applied, at frequency Ω, by all the actions, RF pulse, gradient lobes, eventually spurious de-phasing χ, starting with the thermal equilibrium. That is to say we include the $\pi/2$ excitation pulse in the rotation. We call this rotation "global" rotation. Hence, supposing that we know, on the comb of frequencies as defined in Eq. [20], the global rotation $W(\Omega_l)$, we can decompose it in the form of a sum such as Eq. [31]. Due to the orthogonality of the eigenfunctions, these coefficient matrices (or the scalar coefficients γ_l, σ_l) are easily found,

$$\Gamma_m = \frac{1}{d}\sum_{l=0}^{d-1} R_z\left(-\frac{2\pi}{d}ml\right)U_0^*(\Omega_l)W(\Omega_l). \quad [32]$$

3.4. Mimicking a Perfect Refocusing Pulse

3.4.1. Restriction to a subspace. We will not need the general decomposition in this paper. We indeed suppose that at a certain echo numbered p (p standing for "preparation"), the SU_2 matrix representing the global rotation is expressible uniquely by U_0, and the above decomposition in Eq. [31] is reduced to one term only,

$$W(\Omega_l, p) = U_0(\Omega_l)\Gamma. \quad [33]$$

Note that the RF pulse train from the RF refocusing pulse 1 to the RF pulse p is to be determined, but starting from the echo p we suppose that the modulation of the RF train becomes pure quadratic with the sweep velocity Δ. Hence the system follows Eq. [13], and as U_0 is composed of the eigenfunctions relative to the eigenvalues $j, -j$ the subsequent evolution of the global rotation at echo $p + i$ is

$$W(\Omega_l, p + i) = U_0(\Omega_l)R_z(i\pi)\Gamma. \quad [34]$$

To find out what the meaning and value of the coefficient matrix Γ is, let us have a look first to the special case of a perfect refocusing pulse equal to π.

3.4.2. Restriction to a subspace, the perfect refocusing pulse case. When the refocusing pulse is a π pulse along x, the central rotation $\hat{R}(\Omega)$ in Eqs. [10], [13], and [27] is represented by the SU_2 matrix $Q(0, -j)$ and has no Ω dependence. The eigenvalues of such a matrix are indeed $-j, j$, with the matrix of eigenvectors being $U_0 = Q(1, 1)/\sqrt{(2)} = R_y(\pi/2)$. This means that right after the excitation pulse, which is represented by $R_y(\pi/2)$, without any further preparation, the rotation from thermal equilibrium verifies Eq. [33] with $\Gamma = 1$. But how is this result changed if a rotation by χ around z is inserted between the excitation pulse and before echo zero? Then the rotation from thermal equilibrium to echo 0 is $W_0 = R_z(\chi)R_y(\pi/2)$. But using the fact that $R_y(-\pi/2)R_z(\chi)R_y(\pi/2) = R_x(-\chi)$ one finds that W_0 can again be expressed in the form of a combination of the eigenvectors U_0: $W_0 = R_y(\pi/2)R_x(-\chi) = U_0 Q(\cos(\chi/2), j\sin(\chi/2))$. Hence the global rotation at echo zero is expressible as in Eq. [33] with $\Gamma = R_x(-\chi)$.

3.4.3. Restriction to a subspace, generalization to other nutation angles. For generalization we can suppose that, by careful design, we made the first p refocusing pulses, combined with the initial excitation pulse $R_y(\pi/2)$, induce a global rotation at echo p which is exactly equal to $U_0(\Omega_l)$. Hence, in the absence of spurious dephasing χ, the rotation $P(\Omega_l)$ induced by the first p refocusing pulses and dephasing periods, satisfies,

$$U_0(\Omega_l) = P(\Omega_l)R_y(\pi/2). \quad [35]$$

Supposing now there is a precession χ inserted right after the excitation pulse, the global rotation at echo p is $W_p(\Omega_l, p) = P(\Omega_l)R_z(\chi)R_y(\pi/2)$. Eliminating P between these last two relations, we find again, after the same manipulation of $R_z(\chi)$, that $W(\Omega_l, p) = U_0(\Omega_l)R_x(-\chi)$. And the subsequent evolution at echo $p + i$ is given by Eq. [34]: $W(\Omega_l, p + i) = U_0(\Omega_l)R_z(i\pi)R_x(-\chi)$.

3.4.4. Restriction to a subspace, the measured signal. We now use Eq. [25] with $\sigma_z = \sigma(1, 0)$, and we find that the magnetization at echo $p + i$ is

$$\sigma(\Omega_l, p + i) = U_0(\Omega_l)\sigma(\cos(\chi), (-1)^i j\sin(\chi))U_0^*(\Omega_l).$$

We are interested principally by the transverse component of this vector. Remembering the definition of the scalar CK parameters u_l, v_l of U_0 shown in Eq. [29], the transverse magnetization component can be expressed as

$$X(\Omega_l, p+i) = \cos(\chi)(2\overline{u_l}v_l) + (-1)^i j\sin(\chi)\left(\bar{u}_l^2 + v_l^2\right). \quad [36]$$

The signal we collect is the integral in one crushing pixel, so the signal $\hat{X}(\Omega_0)$ coming from the considered comb $\Omega_l = \Omega_0 + l\Delta$ is obtained by summation over the index l. Performing this summation in Eq. [36] suggests the use of the following quantities,

$$I(\Omega_0) = \frac{1}{d}\sum_{l=0}^{d-1}(2\overline{u_l}v_l), \quad L(\Omega_0) = \frac{1}{d}\sum_{l=0}^{d-1}\bar{u}_l^2,$$

and

$$N(\Omega_0) = \frac{1}{d}\sum_{l=0}^{d-1} v_l^2. \qquad [37]$$

It is time also to remember that the eigenfunctions are determined only within an arbitrary phase and we take this into account. If $\exp(-j\psi_0/2)$ is the arbitrary phase factor applied to the $\vec{u}_{-j}$ eigenfunction, the above coefficients L and M are multiplied by $\exp(j\psi_0)$ and $\exp(-\psi_0)$ respectively, and we can write Eq. [36] in the form

$$\hat{X}(\Omega_0,\, p+i) = \cos(\chi)I + (-1)^i j\sin(\chi)O; \qquad [38]$$

with

$$O(\Omega_0) = e^{j\psi_0}L + e^{-j\psi_0}N. \qquad [39]$$

One cannot choose the coefficients I, L, N. They depend only on the frequency reference Ω_0, the sweep velocity Δ, and the rotation angle θ of the refocusing pulses used. According to Eq. [38] the signal generated by an initial transverse magnetization aligned with the reference axis x is constant along the echo train and given by I, while an initial transverse magnetization along the axis y will generate a signal changing sign every other echo with complex amplitude O. By doubling each phase-encoding value or, equivalently doubling the field of view along the phase-encoding direction, the two signals coming from the same geometric position will be separated. But to recover the two components of the object with equal accuracy and with an efficiency close to the one obtained in the CPMG case, one must have $|I| \simeq |O| \simeq \hat{X}_{\text{cpmg}}$, where $\hat{X}_{\text{cpmg}} = \sin(\theta/2)$.

3.4.5. Choosing ψ_0. O depends on ψ_0 which must be set. It is found that, for the large value of d that we will use, the values of $|I|$, $|L|$, $|N|$ do not vary substantially for different combs (different Ω_0). This is demonstrated by simulation in Fig. 4, where several comb values are superimposed. One possible explanation is that, once the frequencies Ω_l are mapped into one pixel with increasing resonant frequency, and if $d\theta^2 \gg 1$, the functions $u(\Omega_k)$, and $v(\Omega_k)$, form two very smooth functions in regard to the comb step $2\pi/d$. Then, on another comb, with Ω_0 distant from the first by less than the step $2\pi/d$, the eigenfunction is probably almost an interpolation of the first one and very close to it. That is not a demonstration, but this is the only justification we have for now. Assuming the relative independence of the eigenfunctions from Ω_0, one can demonstrate (and this is verified in Fig. 4) that $|L| = |N|$, by using a symmetry that the eigenfunction $\vec{u}_{-j}$ verifies at frequencies Ω and $\Omega + \pi$ (see Appendix C). If $|L| = |N|$, varying the phase ψ_0 will make the coefficient O describe a line segment in the complex plane; for only two values separated by π will the magnitude of this O coefficient be maximum.

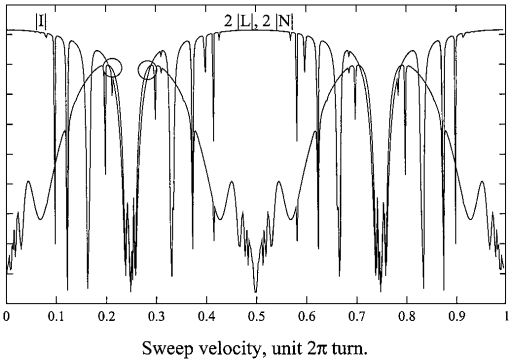

FIG. 4. The magnitude of the signal coefficients $|I|$, $|L|$, and $|N|$ for a sweep velocity $\Delta = 2\pi n/499$. $d = 499$ being a prime number, n has been varied from 1 to 499 without having to worry about common divisors between n and d. The rotation angle of the refocusing pulses was $\theta = 2$ radians (114.6°). Four different combs (Ω_0) have been simulated for each value of Δ and each coefficient. No significant difference is seen and the curves for different Ω_0 are superposed on each other. Also, the curves relative to L and N are indistinguishable from each other. Thus after suitable phasing of the eigenfunction the oscillating signal $|I|$ coefficient can be made equal to $|2L| = |2N|$. There are only two ranges of Δ values (four if one counts the negative counterparts) around $0.19 \times 2\pi$ and $0.31 \times 2\pi$ for which the constant signal and the oscillating signal are of same magnitude. Note that $\Delta = 0.25$ corresponds to the $\{XY-4\}$ (5) modulation and is probably the worst possible choice, at least in terms of signal magnitude, at this already small refocusing angle.

In practice this signal maximum is also attained when the choice of phase ψ_0, for all different combs, renders the function $u(\Omega)$, $v(\Omega)$ the smoothest. In turn, that is achieved when each comb phase $\psi_0/2$ is turned such that the resulting eigenvector $\exp(-j\psi_0/2) \times \vec{u}_{-j}(\Omega_l)$, $l = 0, d-1$ is closest (in the sense of least squares) to the $-j$ eigenfunction of the perfect π case, $[1, 1]^t/\sqrt{(2)}$

$$e^{j\psi_0/2} = E_{uv}/|E_{uv}|, \quad E_{uv} = \sum_{l=0}^{d-1}(u_l + v_l). \qquad [40]$$

As an example, Fig. 5 gives the eigenfunction $-j$ for the sweep velocity $\Delta = 2\pi \times 957/4999$ and for $\theta = 2$ radians, after having phased by Eq. [40] four different combs.

3.4.6. Choosing the sweep velocity Δ. Although the mathematical derivation is a bit involved, one must realize that the numerical computation of the $-j$ eigenfunction as written above, and the associated signals I, O, for a given θ and a given Δ, is very fast on modern computers, even for a denominator d very large. Very large d are necessary for small refocusing angles θ. The lower the refocusing angle, the more difficult it is to have quasi-equality between $|I|$ and $|O|$. Taking $d = 4999$ which is already a large number but also a prime, one can vary n and

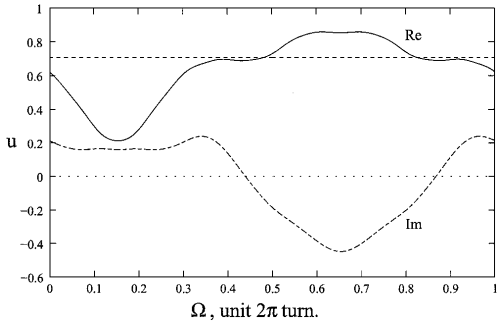

FIG. 5. One component (u) of the $-j$ eigenfunction for $\Delta = 2\pi \times 957/4999$ and $\theta = 2$ radians, at an even echo. Four different combs were used, each one with a phase factor adapted to minimize the mean square error with the $-j$ eigenfunction of the ideal $\theta = \pi$ case also shown on the drawing. The second component is deducible from the first by the $\Omega, \Omega + \pi$ symmetry exposed in Appendix C.

try to find its value(s) for which $|I|$ and $|O|$ are the closest to each other. One such value is $n = 957$, $\hat{\Delta} = 2\pi \times 957/4999$, or $2\pi \times 0.19144$, for which the values of $|I|$ and $|O|$ for a large range of refocusing angles θ are shown in Fig. 6. Other values are $n = 1543$ (corresponding approximately to $\pi - \hat{\Delta}$, or $\Delta = 2\pi \times 0.30866$) or $n = 3456$ (corresponding to $\pi + \hat{\Delta}$, or $\Delta = 2\pi \times 0.69134$). Obviously, the results for $n = 956$ or $n = 955$ are not very different when θ is greater than one radian, but differences appear at small refocusing angles. Admittedly, this is presently a rather futile discussion, as one needs first to be able to determine the preparation P in order to put the system into the desired subspace [see Eq. [35]], and as will be seen now, we succeeded in that only for θ above 2 radians. Still, it is useful to have a target eigenfunction for the preparation period giving suitable signals, even for small refocusing angles.

3.5. Preparation Period

In this subsection we will have to represent the rotation starting from thermal equilibrium, at each frequency Ω, $W_i(\Omega)$ in SU_2 form, at echo number i. Still, for notational simplicity, rather than following the evolution of the $W_i(\Omega)$ matrix, we will follow only its first column vector (or spinor, or CK parameters), noted $\vec{w}_i(\Omega)$. For d sufficiently large, one can consider now that we have defined $\vec{u}_{-j}(\Omega, \theta) = [u, v]^t$ continously for $0 < \Omega \leq 2\pi$, as shown in Fig. 5, and that for a sufficiently dense collection of θ (for instance $\theta = 3, 2.8, 2.6 \ldots$ radians). Our aim is now to find a sequence of sweep velocities Δ_i, $i = 1 \ldots p$ such that the recursion in Eq. [10], written in spinor form

$$\vec{w}_i(\Omega, \theta) = Q(c \exp(j\Omega), -js) S(\Delta_i) \vec{w}_{i-1}(\Omega, \theta),$$

(with $c = \cos(\theta/2)$, $s = \sin(\theta/2)$) gives a sequence of $\vec{w}_i(\Omega, \theta)$

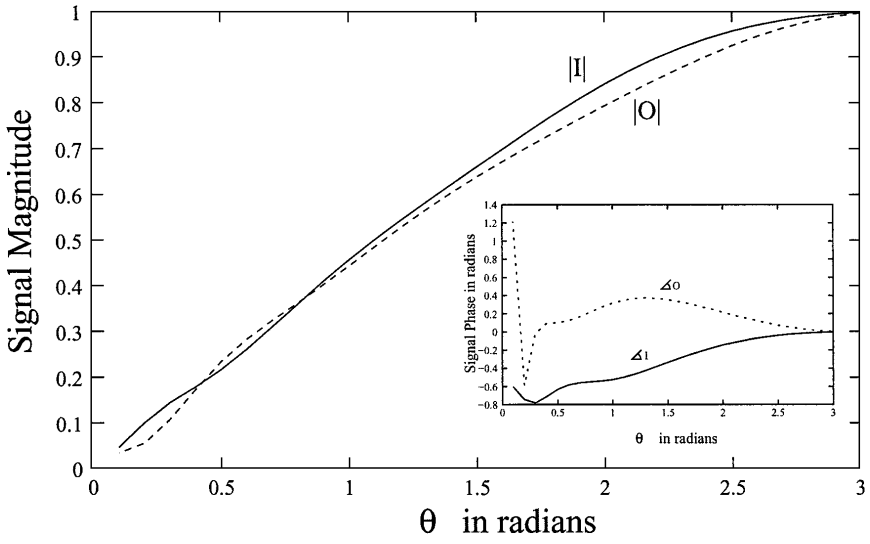

FIG. 6. The magnitude of the signal coefficients I and O for $n = 957$ and $d = 4999$ for $\theta = 0.1 \ldots 3$ radians. There is a $\pm 3\%$ possible variation between $|I|$ and $|O|$. The inset represents the phase of the signal coefficients as a function of the nutation angle. We note that the phase is not null, but for nutation angles above 1.5 radian the phase variation is small (below 20°). Also, the two phase angles are almost opposite, i.e., the average of both phases is almost independent of θ.

which tends rapidly toward the eigenfunction $(-j)^i \vec{u}_{-j}(\Omega, \theta)$, when the initial condition is $w_0 = [1, 1]^t/\sqrt{2}$ (which is the spinor representation of the excitation pulse $R_y(\pi/2)$). The factor $(-j)^i$ is to take into account the natural evolution of the eigenfunction. Actually it is better to include that factor in the evolution equation of the state vector $\vec{w}_i$ itself, following the evolution of $j^i \vec{w}_i$ which ideally should tend toward the constant function $\vec{u}_{-j}$. Then Eq. [10] is replaced by

$$\vec{w}_i(\Omega, \theta) = jQ(c \exp(j\Omega), -js)S(\Delta_i)\vec{w}_{i-1}(\Omega, \theta), \qquad [41]$$

and we can take

$$J(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{p} g_i \sum_{\theta} \int_0^{2\pi} |\vec{u}_{-j} - \vec{w}_i|^2(\Omega, \theta)\, d\Omega$$

as the cost function to be minimized. g_i is a weight to more strongly emphasize the end of the preparation interval than its beginning. The internal quadratic term of the cost function is simplified, due to the normalization $|u_{-j}|^2 = |w_i|^2 = 1$, leaving only a term $\mathrm{Re}(\vec{u}^*_{-j}\vec{w}_i)$. But as both $j^i\vec{u}_{-j}$ and $\vec{w}_i$ are realizable by a $\pi/2$ excitation pulse followed by a train of echoes, they must satisfy a symmetry between Ω and $\Omega + \pi$ (see Appendix C), and one can show that $\int_0^{2\pi} \vec{u}^*_{-j} w_i \; d\Omega$ is real. Hence the cost function is simply

$$J(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{p} g_i \sum_{\theta} \int_0^{2\pi} \vec{u}^*_{-j}\vec{w}_i(\Omega, \theta)\, d\Omega. \qquad [42]$$

This is a problem of optimal control of a nonlinear system (although the cost function is linear). Still the system can be linearized and the optimization of the loss function performed by a classical quasi Newton procedure (*16*), without of course the guarantee that the global minimum is found.

3.6. Resulting Optimal Phase Modulation

The simplest result was obtained by optimizing the cost function of Eq. [42] for only $\theta = 2.8$ radians (and for $\hat{\Delta} = 2\pi \times 957/4999$). The preparation period was fixed to seven echoes, and with only a terminal loss function obtained by setting $g_i = 0$, $i = 1 \ldots 6$, $g_7 = 1$. The optimal parameters Δ_i are given in Table 1. The frequency sweep δ_i can be obtained by Eqs. [11] and [12]. Setting by convention the receiver phase at echo zero $\phi_{r0} = 0$, the first emission phase ϕ_{x1} is computed using Eq. [3]; and from that the receiver phase at the first echo ϕ_{r1} by Eq. [4]; and recursively all other emission and reception phases.

The in phase and out of phase component responses, calculated whether by the density matrix, or simply by the Bloch equations are shown in Fig. 7. Although the stabilization does not seem perfect, one can compare this result with what is obtained with the XY − 4 modulation (*5*) shown in Fig. 8. We see already that at 160° refocusing angle, the XY − 4 modulation does not give a sustained signal. Further, the spurious modulation is also very large. At 140° and below, the signals are chaotic. One advantage of the XY − 4 modulation may be that the out of phase signal and the in phase signal are identical, but clearly this modulation scheme should not be used below 170°.

TABLE 1
Optimal Sweep Velocities for a Preparation Period of Seven Echoes

i	Δ_i
1	0.191438
2	0.192650
3	0.225601
4	0.197626
5	0.129640
6	0.197671
7	0.282091
8...	957/4999

Note. Starting from the eighth interval, the sweep velocity becomes constant.

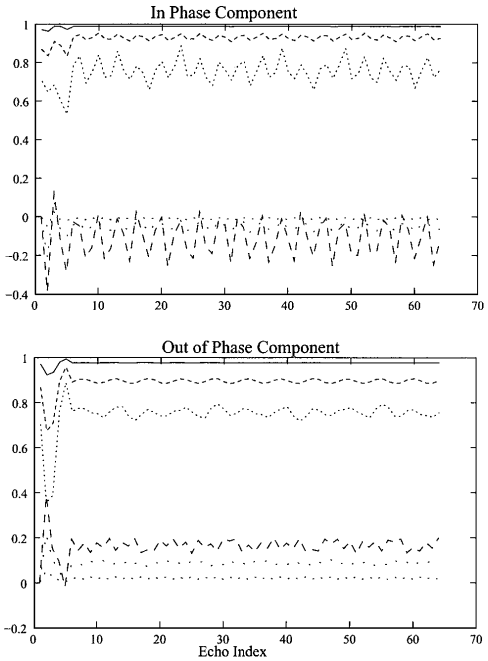

FIG. 7. The signals generated by an initial magnetization aligned, at echo zero, with x (in phase component) or by an initial magnetization aligned with y (out of phase component) for refocusing angles $\theta = 2.8$, 2.4, 2.0 radians (approximately 160, 140, 115°), with the sweep velocities given in Table 1. Both the real and imaginary parts of the signals are depicted.

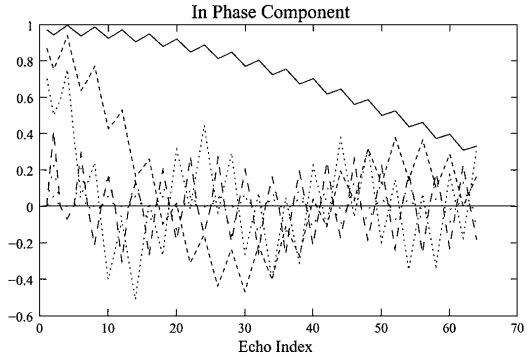

FIG. 8. The signals generated by the in phase component with the XY − 4 modulation for refocusing angles $\theta = 2.8, 2.4, 2.0$ radians. The signals generated by the out of phase component are strictly identical.

We have tried other cost functions over a larger range of θ and longer preparation period. The results may be better than those presented here but only marginally so. Hence at present, the phase modulation given in Table 1 is our best choice. Also note that the modulation used in (*9*), and whose values are given in (*10*), is less effective than the modulation given here. Indeed that modulation was determined along with a possible refocusing angle modulation (i.e., amplitude and phase modulation of the RF train) of the first three RF pulses. When allowing an amplitude modulation, three pulses are even more efficient than the seven phase modulated pulses presented here and the signals are better stabilized. But in practice, making the refocusing angle vary, implies designing different refocusing pulses for each echo as we did in (*17*). This is not a simple task and in (*9*) we used only the phase modulation part making the result suboptimal. In future we may have to revert to amplitude and phase modulation but this needs careful design of RF pulses and also an assessment of the sensitivity with regard to B_1 inhomogeneity or calibration errors.

4. PRINCIPLE OF THE RECONSTRUCTION

The experimental result shown below is an imaging experiment and we have to explain, even if it is not in the most extreme details, how the echoes are used to form an image.

A sustained spin-echo experiment, as the one we have in hand, where one magnetization component stays constant and the other magnetization gives way to an alternating signal, imposes a reconstruction different from the classical 2DFT or 3DFT which is used with a CPMG experiment (*18*). In (*8*), we proposed to double each phase encoding: two consecutive echoes are acquired with the same encoding value. The reason why we must repeat the same phase encoding twice stems from another parameter we have not yet taken into account the "spurious receiver phase," which comes in addition to the object phase χ.

Let the initial transverse magnetization at echo zero, and in a given voxel, at any position in space $\xi = (x, y, z)$ and of volume $d\xi$, be $dX_0(\xi)$:

$$\begin{aligned} dX_0(\xi) &= \rho(\xi) e^{j\chi(\xi)}\, d\xi \\ &= (\rho_x(\xi) + j\rho_y(\xi))\, d\xi. \end{aligned}$$

Then the average magnetization in this voxel at echo $p+i$, and thus also the signal originating from the considered voxel would be, according to [38], and supposing that the signal coefficients $I(i)$ and $O(i)$ are stationary ($I(i) = I$, $O(i) = O$)):

$$d\hat{X}(p+i, \xi) = (I\rho_x(\xi) + (-1)^i \times Oj\rho_y(\xi))\, d\xi. \qquad [43]$$

But, actually we cannot identify this element of transverse magnetization with the signal that we receive from that element of volume. Indeed we must write this element of signal dS in the following manner:

$$\begin{aligned} dS(p+i, \xi) &= e^{j\varphi(\xi)}\, d\hat{X}(p+i, \xi) \\ &= e^{j\varphi(\xi)} (I\rho_x(\xi) + (-1)^i \times Oj\rho_y(\xi))\, d\xi. \end{aligned} \qquad [44]$$

The phase factor $\exp(j\varphi)$ is due to a possible phase error between the emission and the reception. Indeed we have defined the rotating frame uniquely in terms of the emitting field, and set the receiving phase in accordance to that field. But a spurious phase in the receiver may add itself to the signal phase. This could easily be corrected if this phase were a constant. But this phase can be dependent on the resonant frequency (due for instance to the antialiasing filter), and the correction may become more complicated. But more dramatically, the phase error φ can be space dependent, and particularly depends also on the position along the phase encoding direction(s). This is indeed the case if one uses two separated coils for emission and reception: $\varphi(\xi)$ then represents the angle between the B_1 receiving field (projected on the plane perpendicular to the main field) and the B_1 emitting field (also projected). Another source of possible space dependent phase error is the action of eddy currents during the read period of each echo. A priori, $\varphi(\xi)$ is varying slowly in space but it can easily account for some tens of degree variation in one field of view. We show now that this suffices to oblige us to repeat twice the same encoding value. For simplicity we consider a 2D image acquisition (not a 3D one). We suppose that we use a classical 2DFT encoding-reconstruction scheme with the encoding value increasing linearly between each echo: the increment between each encoding step is linked to the maximum extension of the field of view along the phase-encoding direction, that we denote by $2y_M$, and the magnetization at the positions $y = \pm y_M$ change sign every echo under the influence of that encoding. If now we consider Eq. [43] as representing the right model, we can deduce without writing any further equation that we will obtain the following reconstructed

image ρ_r

$$\rho_r(\xi) = I\hat{\rho}_x(x, y) + Oj\hat{\rho}_y(x, y + y_M), \quad [45]$$

where $\hat{\rho}_x$ and $\hat{\rho}_y$ are low pass filtered versions of the two component of the object. There is aliasing between the position x, y and the position $x, y + y_M$. But one may argue that the two aliased values at the position $\xi = x, y$ are in quadrature to each other: $I\hat{\rho}_x(x, y)$ and $jO\hat{\rho}_y(x, y+y_M)$ and could be separated (if I and O are without phase, which is approximately the case according to Fig. 6). Unhappily the phase factor $\exp(j\varphi(\xi))$ renders this idea inapplicable. It is easily found that, with the true signal expression [44] and still with a classical 2DFT phase encoding scheme, the reconstructed image becomes

$$\rho_r(\xi) = I\hat{\rho}_x(x, y)e^{j\varphi(x,y)} + Oj\hat{\rho}_y(x, y + y_M)e^{j\varphi(x,y+y_M)}. \quad [46]$$

It suffices here to consider the degenerate case: it corresponds to the case where the spurious receiver phase at position x, y and the spurious receiver phase at position $x, y + y_M$, have a difference of $\pi/2$! Then the two magnetization elements $\hat{\rho}_x(x, y)$ and $\hat{\rho}_y(x, y + y_M)$ emit two indistinguishable signals (if the signal coefficients I and O have the same phase; otherwise one could find another value for the receiver phase difference) and thus the two magnetizations are irremediably aliased.

To counteract that, we use the same phase encoding for two subsequent echoes i and $i + 1$, then adding and substracting the two signals, $S_1(p + i) = S(p + i + 1) + S(p + i)$, $S_2(p + i) = S(p + i + 1) - S(p + i)$, we obtain from [44]

$$\begin{aligned} dS_1(p + i) &= 2Ie^{j\varphi(\xi)}\rho_x(\xi)\,d\xi, \\ dS_2(p + i) &= 2jOe^{j\varphi(\xi)}\rho_y(\xi)\,d\xi. \end{aligned} \quad [47]$$

Because the two quantities $2I\exp(j\varphi(\xi))\rho_x(\xi)$ and $2O\exp(\varphi(\xi))\rho_y(\xi)$ have a phase which is varying in space very slowly we can acquire and reconstruct each one, separately, by a half k-space (homo-dyne) acquisition-reconstruction (*19*).

5. EXPERIMENTAL RESULT AND DISCUSSION

The principle of the quadratic phase modulation, with a well chosen sweep velocity Δ and after a suitable preparation, has now been validated. It has been used on volunteers not only for spine diffusion imaging (*9*), but also for diffusion tensor imaging in the head (*20*), T_2 and T_2^* sensitization (*21*), and even for phase shift thermometry (*22*). Admittedly these studies were not used with the new preparation period presented here. The effectiveness of this new modulation scheme is verified here on a phantom and this is depicted in Fig. 8. This is a single shot acquisition, where we have forcibly induced a phase variation in the object by inserting a gradient blip between the excitation RF pulse and the echo 0 reference time. Another side of the development which is worth mentioning has been the evolution of the reconstruction program. In the first volunteer study (*9*) we performed the half k-space acquisition the usual way, and the number of k-lines acquired in the complementary half k-space was relatively high (6 to 8 over-scan lines) in order to identify the spurious receiver phase φ. As we must double each phase encoding, this resulted in a much delayed minimum echo time (12 to 16 echo spaces, or in the order of 60 to 90 ms increase in minimum echo time on a whole body scanner), and the gain in signal to noise ratio compared to the Alsop solution (*4*) was often entirely lost, due to T2 relaxation. The other studies, including the present one, have used an acquisition–reconstruction scheme, where an independent acquisition permits characterizing the receiver phase φ with very good precision (actually using a full k-space acquisition); then during the normal acquisition, we just have to correct for the phase φ, not characterize it, and the number of over-scan lines can be reduced to 2. Still, if this allows us to retain a substantial portion of the signal coming from short T2 species, it does not reduce the blurring associated with the signal slope in the k-space (see Fig. 9 caption). Against this, the only two options are using multishot acquisition or finding a way to traverse the k-space more rapidly. But, at least for diffusion imaging, multishot acquisition is only feasible if this acquisition can acquire and compensate for the random, shot dependent, object phase modulation χ. Recently Pipe *et al.* (*23*) proposed such a self-navigated acquisition. Let us note that these authors used an *XY* quadratic phase. They did not double each phase encoding and their scheme will probably not work, as is, with distinct emitting–receiving coils. Another route that may be envisioned is to couple the here presented non-CPMG acquisition–reconstruction scheme with coil sensitivity encoding (*24*). Normally, once the two real and imaginary responses

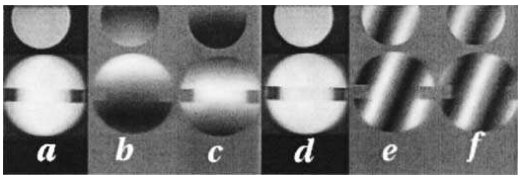

FIG. 9. Magnitude (a, d), real part (b, e), and imaginary part (c, f) of an object with a variable phase χ that we have induced by a gradient blip interposed between the excitation pulse and echo zero. This gradient was applied along the phase encoding direction, left to right. In (a, b, c) this gradient was nulled and in (d, e, f) its amplitude was calculated to induce, approximately, a $2 \times 2\pi$ phase variation in the field of view (FOV) extension along y. The phase variation in (a, b, c) may come from a spurious object phase χ, but may as well, and more probably, be due to a receiver phase φ. This is the reason why we show two acquisitions, one acquisition not being sufficient proof of the efficiency of the RF phase modulation to obtain independency with respect to the initial phase of the magnetization. The acquisition was single-shot. The FOV was $260 \times 130\{\text{mm}\}^2$ for a matrix 256×64. Two over-scan lines were acquired and thus a total of $(32 + 2) \times 2$, or 68 echoes were acquired, lasting around 340 ms. The object at bottom has a T_2 on the order of 200 ms, whereas the top cylinder is filled with tap water with a T_2 greater than 1500 ms. Note the higher blurring of the reconstructed short T_2 object in comparison to the water cylinder.

are separated by the double acquisition as in Eq. [47], the sensitivity encoding scheme can be applied independently.

6. CONCLUSION

We presented the mathematical basis for the use of quadratic phase modulation to generate a train of spin echoes which is almost completely insensitive to initial phase. Although not yet perfect this approach has already proven useful in practice. Future progress may rely on the background presented here.

APPENDIX A

Let $\mathcal{R}(\Omega_d) = Q(\alpha, \beta)$. We separate the real part α_r of $\alpha = \alpha_r + j\alpha_i$, and put $-j$ as a factor of a vector matrix $\mathcal{R}(\Omega_d) = \alpha_r \mathbf{1} - j\sigma(-\alpha_i, j\beta)$. Then we normalize the vector part, in order to put the rotation matrix in the form of Eq. [26]. For that, we define $\mathcal{S} = \sqrt{|\beta|^2 + \alpha_i^2}$ and write $\mathcal{R}(\Omega_d) = \alpha_r \mathbf{1} - j\mathcal{S}\sigma(z, X)$ with $z = -\alpha_i/\mathcal{S}, X = j\beta/\mathcal{S}$. Then we factor the vector matrix $\sigma(z, X)$ in $U\sigma_z U^*$, with $U = Q(u, v)$. We must verify simultaneously: $|u|^2 - |v|^2 = z, 2\bar{u}v = X$. This is a classical problem which leaves a phase indetermination (linked to the phase indetermination of an eigenvector); we choose to have the first component real and find $u = \sqrt{(1+z)/2}$, $v = X/\sqrt{2(1+z)}$.

APPENDIX B

The Z transform approach, in addition to the SU_2 formalism, is the basis of the so-called Shinnar–LeRoux algorithm (*15*). We want to find the cycle rotation matrix, but this time for any frequency Ω, not just for one comb of frequencies. We show that we can express this rotation in terms of polynomials of the variable $Z = \exp(j\Omega)$. We write Eq. [10] using the SU_2 representation of the central rotation by Eq. [27] but using Z as notation for $\exp(j\Omega)$

$$\mathcal{R}_i(\Omega) = Q(cZ, -js)\mathcal{R}_{i-1}(\Omega - \Delta),$$

for $i = 1 \ldots$.

With the initial condition, at echo zero $R_0 = Q(1, 0)$. We need only follow the first column α_i, β_i (or Cayley–Klein parameters) of the SU_2 rotation matrix $\mathcal{R}_i(\Omega) = Q(\alpha_i(\Omega), \beta_i(\Omega))$. Let us develop the two components $\alpha_i(\Omega), \beta_i(\Omega)$ in a series, possibly infinite, of powers of Z (or otherwise stated, take the inverse Fourier transform of these two quantities): $\alpha_i(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{i,k} Z^{-k}$, $\beta_i(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_{i,k} Z^{-k}$. The shift in frequency by Δ is simply expressed in terms of the coefficients $\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}$ by a local multiplication by the power of $w = \exp(j\Delta)$, $\alpha'_{i,k} = w^k \alpha_{i-1,k}$, $\beta'_{i,k} = w^k \beta_{i-1,k}$. The central rotation part involves a shift by plus one or minus one and a combination: $\alpha_{i,k} = c\alpha'_{i,k+1} - js\beta'_{i,k}$, $\beta_{i,k} = -js\alpha'_{i,k} + c\beta'_{i,k-1}$. We then arrive at a recursion on the time domain coefficient very similar to the one used in the (direct) SLR transformation. This way, one can simulate very precisely the response of the system even for an arbitrary phase modulation (i.e., even when Δ is variable with i).

But for now, we use these equations for obtaining some very simple results. We have the initial condition $\alpha_{0,k} = 0 k \neq 0, \alpha_{0,0} = 1, \beta_{0,k} = 0 \,\forall k$. Without entering the detail of the calculus let us make one or two steps of the just defined recursion, only to discover what coefficients are not zero. At echo 1 we have: $\alpha_1(Z) = cZ$, $\beta_1(Z) = \beta_{1,0}$. At echo 2 the polynomials have the form $\alpha_2(Z) = c^2 Z^2 + \alpha_{2,0}$ and $\beta_2(Z) = \beta_{2,1} Z^{-1} + \beta_{1,-1} Z$. One can infer, and verify by recurrence that at echo number i, $\alpha_i(Z) = Z^i a(Z^{-2})$, $\beta_i(Z) = Z^{i-1} b(Z^{-2})$, where a, b are polynomials of order $0 \ldots i-1$ of the variable Z^{-2}.

We have some interesting symmetry properties to derive from this. At even echo i number, α has only even order powers of Z, whereas β has only odd order powers, these properties being swapped at odd echo. The consequence in the frequency domain is that, for echos with even index, $\alpha_{2p}(\Omega + \pi) = \alpha_{2p}(\Omega)$, whereas $\beta_{2p}(\Omega) = -\beta_{2p}(\Omega + \pi)$. Conversely, at odd echo number $N = 2p + 1$, the symmetry is reversed $\alpha_{2p+1}(\Omega + \pi) = -\alpha_{2p+1}(\Omega)$, $\beta_{2p+1}(\Omega) = \beta_{2p+1}(\Omega + \pi)$.

Another easy result is the value of the "leading term" $\alpha_{N,-N}$ (also the zero order coefficient of a). In the recursion it is never combined with any other coefficient and its value at echo N is easily derived: $\alpha_{N,-N} = c^N \times (1 \times w \cdots \times w^{N-1})$, or $\alpha_{N,-N} = c^N \exp(j\Delta N(N-1)/2)$.

If we now consider one complete cycle of the modulation, $N = d$, if $\Delta = 2\pi n/d$, one has simply $\alpha_{d,-d} = c^d$, with, we recall, $c = \cos\theta/2$. Consider now the real part of $\alpha_d(Z)$, but seen in the Ω domain. Recall that according to the spinor representation this is equal to $\cos(\Theta(\Omega)/2)$, where $\Theta(\Omega)$ is the rotation angle of the cycle rotation. This cycle rotation is the same for all the frequency positions belonging to the same comb $\Omega = \Omega_0 + l \times 2\pi n/d$. Hence $\mathrm{Re}(\alpha_d(\Omega))$ is, in the angular frequency domain, a periodic function of period $2\pi/d$; otherwise stated, in the time domain, $\mathrm{Re}(\alpha_d(Z))$ contains only coefficients of powers Z^d: $\ldots Z^{2d}, Z^d, 1, Z^{-d}, Z^{-2d}, \ldots$. But $\alpha_d(Z)$ has terms of Z powers only in the range $d, -d+1$. Hence $\mathrm{Re}(\alpha_d(z))$ can only be in the form $(c^d Z^d + \alpha_0 + c^d Z^{-d})/2$ or $\mathrm{Re}(\alpha_d(Z)) = c^d \cos(d\Omega) + \alpha_0$.

Consider now d odd. In this case the comb relative to Ω_0 and the comb relative to $\Omega_0 + \pi$ are distinct and interlaced (separated by π/d), and also, according to the symmetry property, $\alpha_{2p+1}(\Omega + \pi) = -\alpha_{2p+1}(\Omega)$, so $\mathrm{Re}(\alpha)$ changed sign between the two combs, and thus the constant term α_0 must be null.

Finally, the cycle rotation angle is given by $\cos(\Theta(\Omega)/2) = c^d \cos(d\Omega)$. For d sufficiently large c^d is very small, even when c is large (θ small), and thus the cycle rotation angle Θ is close to π.

APPENDIX C

From Appendix B we know that the Cayley–Klein parameters (or spinor components) α_i, β_i of the integrated rotation $\mathcal{R}_i$ have symmetry relations between the position frequency Ω and

the frequency $\Omega+\pi$. This has been derived with $\Delta=$ constant but it is true for any variable sweep velocity. Let us consider W_i the rotation from thermal equilibrium to echo i; we must include $R_y(\pi/2)$ in front of $\mathcal{R}_i$ and even a rotation $R_z(\chi)$, giving $W_i=\mathcal{R}_i R_z(\chi) R_y(\pi/2)$. Let $\alpha_{-,i}$, $\beta_{-,i}$ be the CK parameters of W_i. A simple calculation shows that the symmetry on α_i, β_i induces the following symmetry: $\alpha_{-,i}(\Omega+\pi)=\bar{\beta}_{-,i}(\Omega)$, $\beta_{-,i}(\Omega+\pi)=\bar{\alpha}_{-,i}(\Omega)$, if i is even. If the echo number is odd the same relations apply but with a minus sign added. The important point is that the eigenfunction $\vec{u}_{-j}(\Omega)$ must satisfy these symmetries if we want to be able to attain it by $\pi/2$ excitation followed by a train of echoes!

We now verify that it is indeed the case, at least when d is odd. When d is odd, if $\mathcal{R}_d(\Omega)$ is in term of its CK parameters, $\mathcal{R}_d(\Omega)=Q(\alpha_d,\beta_d)$, then $\mathcal{R}_d(\Omega+\pi)=Q(-\alpha_d,\beta_d)$. And one verifies that if $\mathcal{R}_d(\Omega)$ can be decomposed in eigenvectors by $Q(\alpha_d,\beta_d)=U\Lambda U^*$ with $U=Q(u,v)$ then $\mathcal{R}_d(\Omega+\pi)$ can be decomposed in $Q(-\alpha_d,\beta_d)=V(-\bar{\Lambda})V^*$ with $V=Q(\bar{v},\bar{u})$. Also as the eigenvalues of the cycle rotation are, for d sufficiently large, close to j, $-j$, we can choose for the eigenfunction relative to $-j$, on the comb Ω_0: $\vec{u}_{-j}(\Omega_0)=[u,v]^t$ and on the comb $\Omega_0+\pi$: $\vec{u}_{-j}(\Omega_0+\pi)=[\bar{v},\bar{u}]^t$. Thus realizing a spinor function which corresponds to an even echo attainable from thermal equilibrium (we say realizable). If we apply a phase factor $\exp(-j\varphi_0/2)$ on one comb, we will apply $\exp(j\varphi_0/2)$ on the other comb to keep the consolidated function $\vec{u}_{-j}(\Omega)$ realizable. Note that the evolution of $\vec{u}_{-j}$ from echo to echo being reduced to a simple multiplication by $-j$, at the next echo (odd echo), the other type of symmetry is automatically obtained. Also, the symmetry on the CK parameters (spinor component) induces the following symmetry on the magnetizations coefficients: $I(\Omega_0+\pi)=I(\Omega_0)$, $L(\Omega_0+\pi)=L(\Omega_0)$, $N(\Omega_0+\pi)=N(\Omega_0)$.

ACKNOWLEDGMENTS

The author thanks Graeme McKinnon, first, for having made him aware some years ago of the shortcomings of the CPMG sequence, second, for having designed a programming environment that the author has used exclusively for all his developments and particularly the practical application of the present work, and finally for having corrected the present article.

REFERENCES

1. J. Hennig, Multiecho imaging sequences with low refocusing angles, *J. Magn. Reson.* **78,** 397–407 (1988).
2. H. Y. Carr and E. M. Purcell, Effects of diffusion on free precession in nuclear magnetic resonance experiments, *Phys. Rev.* **94,** 630–638 (1954).
3. D. G. Norris, P. Bornert, T. Reese, and D. Leibfritz, On the application of ultra-fast rare experiments, *Magn. Reson. Med.* **27,** 142–164 (1992).
4. D. C. Alsop, Phase insensitive preparation of single-shot rare: Application to diffusion imaging in humans, *Magn. Reson. Med.* **38,** 527–533 (1997).
5. A. A. Maudsley, Modified Carr–Purcell–Meiboom–Gill sequence for NMR Fourier imaging applications, *J. Magn. Reson.* **38,** 527–533 (1997).
6. T. Gullion, D. B. Baker, and M. S. Conradi, New, compensated Carr–Purcell sequences, *J. Magn. Reson.* **89,** 479–484 (1990).
7. J. B. Murdoch, An "Effective" method for generating spin-echo intensity expression, *in* "Proceedings Second SMR Scientific Meeting," San Francisco, CA, 1994, p. 1145.
8. P. Le Roux, Progress in non-CPMG fast spin echo, *in* "Proceedings Seventh ISMRM Scientific Meeting," Philadelphia, PA, 1999, p. 7.
9. P. Le Roux, C. A. Clark, A. Darquie, and P. G. Carlier, Rapid diffusion imaging of the human spinal cord using non-CPMG single shot fse, *in* "Proceedings Eighth ISMRM Scientific Meeting," Denver, CO, 2000, p. 1501.
10. P. Le Roux, Spin echoes with a quadratic phase modulation of the rf pulse train, *in* "Proceedings Ninth ISMRM Scientific Meeting," Glasgow, UK, 2001, p. 1788.
11. A. Messiah, "Quantum Mechanics," Dover, New York (2000).
12. E. Jaynes, Matrix treatment of nuclear induction, *Phys. Rev.* **98,** 1099–1105 (1954).
13. A. L. Bloom, Nuclear induction in inhomogeneous fields, *Phys. Rev.* **98,** 1105–1111 (1954).
14. B. Blumich and H. W. Spiess, Quaternions as a practical tool for the evaluation of composite rotations, *J. Magn. Reson.* **61,** 356–362 (1985).
15. J. Pauly, P. Le Roux, D. Nishimura, and A. Macovski, Parameter relations for the Shinnar–Le Roux selective excitation pulse design algorithm, *IEEE Trans. Med. Imaging* **10,** 53–65 (1991).
16. J. Nocedal and S. Wright, "Numerical Optimization," Springer-Verlag, New York (1999).
17. P. Le Roux and S. Hinks, Echoes stabilization in fse sequences, *Magn. Reson. Med.* **30,** 183–191 (1993).
18. P. Le Roux and G. McKinnon, Non cpmg fast spin echo with full signal, *in* "Proceedings Sixth ISMRM Scientific Meeting," Sydney, Australia, 1998, p. 574.
19. D. Noll, D. Nishimura, and A. Macovski, Homodyne detection in magnetic resonance imaging, *IEEE Trans. Med. Imaging* **10,** 154–163 (1991).
20. M. E. Bastin and P. Le Roux, Application of non-cpmg fast-spin-echo sequences to mr diffusion imaging, *in* "Proceedings Ninth ISMRM Scientific Meeting," Glasgow, UK, 2001, p. 1548.
21. P. Carlier, A. Darquie, V. Lebon, A. Andrade, R. J. Gilles, and P. Le Roux, Detection of tissue oxygen changes using interleaved t2 and t2* non-cpmg ssfse imaging, *in* "Proceedings Ninth ISMRM Scientific Meeting," Glasgow, UK, 2001, p. 905.
22. M. V. anf Frank Lethimonnier, P. Pattynama, and P. Le Roux, Use of fast-spin-echo mri for mr thermometry, *in* "Proceedings Ninth ISMRM Scientific Meeting," Glasgow, UK, 2001, p. 2195.
23. J. G. Pipe, V. G. Farthing, and K. P. Forbes, Multishot diffusion-weighted fse using propeller mri, *Magn. Reson. Med.* **47,** 42–52 (2002).
24. K. Pruessman, M. Weiger, M. Scheidegger, and P. Boesiger, Sense: Sensitivity encoding for fast mri, *Magn. Reson. Med.* **42,** 952–962 (1999).

Conclusion

J'espère avoir montré que l'algorithme *polynomial* de conception d'impulsions RF, connu sous le nom *'SLR'* est simple, efficace et répond bien au problème posé : la génération d'impulsions continues courtes, d'énergie finie. L'algorithme est directement adapté au problème à résoudre et ne fait aucun détour par des équations ou algorithmes existants adaptés à des situations similaires mais non totalement identiques.

Ceci étant dit l'algorithme n'est pas général. Par exemple il sera incapable de retrouver un long train d'impulsions ; dans ce cas il trouvera une solution, donnant des résultats identiques en terme de rotation finale, mais avec une suite de rotations élémentaires totalement différente. C'est un problème mal posé et il faudrait pouvoir faire intervenir des critères de régularisation. Mais cela s'avère difficile dans le contexte d'equations alors très non linéaires et d'un algorithme qui par essence s'intéresse peu aux états intermédiaires (seul l'état obtenu en fin de période compte).

J'ai montré par ailleurs que l'utilisation du même outil spineur pour représenter des rotations permet d'obtenir une description très simple de la dynamique de l'aimantation dans le cas des séquences à échos multiples, au moins dans le cas où la modulation du train d'impulsions radiofréquencres est constante ou semi adiabatique. Ces résultats sont souvent atteignables par d'autres méthodes, mais alors avec un attirail mathématique qui obscurcit la réalité physique.

Cependant, et pour résoudre le problème de la perte de sensibilité d'une ou de deux composantes de l'état initial des séquences précédentes, j'ai abordé les trains d'impulsions modulés rapidement en phase. Dans le cas général c'est un problème compliqué, mais je me suis restreint au cas d'une modulation de phase quadratique (mais de coefficient de balayage quelconque). Là encore les outils spineurs et l'écriture polynomiale entrent en jeux, donnant une certaine unité à l'ensemble de ces travaux.

Cependant, et bien que couronnés de quelques succès, ces travaux posent plus de questions qu'ils n'en résolvent, ce qui en soi est assez heureux en terme de plan de carrière, au moins pour les plus jeunes que moi. Comme mentionné, l'algorithme *SLR* ne résoud pas le problème général qui est, pour des protons isolés, de trouver la suite d'impulsions menant à une répartition d'états *quelconque*. Peut-être quelque combinaison avec l'analyse de type Floquet serait nécessaire. L'autre axe de progression serait bien sûr de pouvoir utiliser le même type d'inversion pour des systèmes quantiques à plus de deux états, homo ou hétéronucléaires. Mais sans être aussi ambitieux, un problème simple comme l'utilisation de deux ou plusieurs antennes d'émission pour accélérer une sélection (géométrique) 2D en imagerie, demande réflexion. En effet il n'est pas évident de pouvoir trouver, par un algorithme de type *SLR*, la modulation des multiples ondes *RF* dans un tel montage. Beaucoup de problèmes restent donc en suspens, même en se limitant à l'imagerie *RMN* de l'eau.

Annexes générales.

Filtre à déphasage minimum.

Le problème de la factorisation de spectre. Nous nous restreignons ici au cas de filtres *RIF* qui nous intéressent plus particulièrement mais la plupart des résultats sont extensibles aux filtres *RII* (réponse impulsionnelle infinie, par exemple dont la fonction de transfert est une fonction rationnelle).

Soit donc un filtre *RIF* , $A(Z^{-1})$ qu'on sait être causal d'ordre n.

$$A(Z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n} a_i Z^{-i} \tag{270}$$

On peut toujours, connaissant ses zéros z_i l'écrire sous forme de produit de ses monômes

$$A(Z^{-1}) = k \prod_{i=1}^{n} (1 - z_i Z^{-1}). \tag{271}$$

Avec ici k un facteur de gain tel qu'on puisse régler le terme d'ordre zéro du polynôme $a_0 = k$. Ecrivons le carré de la norme sur le cercle unité

$$\rho(\omega) = |A(\omega)|^2 = \bar{A}(\omega) A(\omega) = A(\bar{Z}^{-1}) A(Z^{-1}) \tag{272}$$

sous forme analytique. Cela consiste, pour le non mathématicien, à remplacer $\bar{Z}$ par Z^{-1} et $\bar{Z}^{-1}$ par Z, ne changeant rien à ce qui se passe sur le cercle unité $|Z| = 1$, mais en s'interdisant ainsi l'usage de l'opérateur conjugaison

$$\rho(\omega) = k\bar{k} \prod_{i=1}^{n} (1 - z_i Z^{-1}) \prod_{i=1}^{n} (1 - \bar{z}_i Z). \tag{273}$$

Si on prend la transformée de Fourier inverse de $\rho(\omega)$ on obtient un signal dit d'autocorrélation qui est à symétrie hermitienne, sa transformée en Z étant

$$\rho(Z) = \bar{\rho}_n Z^n + \ldots \bar{\rho}_1 Z^1 + \rho_0 + \rho_1 Z^{-1} + \ldots + \rho_n Z^{-n}. \tag{274}$$

Nous nous attaqouns maintenant au problème inverse. Le spectre $\rho(\omega)$ ou $\rho(Z)$ est donné, et on cherhe un filtre *RIF* causal d'ordre n ayant un module au carré egal à $\rho(\omega)$ sur le cercle unité. On pourrait, si on le voulait, chercher les zéros de $\rho(Z)$; dans ce cas on trouverait, pour chaque zéro z_i, et correspondant au monôme $1 - z_i Z^{-1}$, un autre zéro obtenu par inversion autour du cercle unité $z_i' = 1/\bar{z}_i$, et qui lui correspondrait au monôme $(1 - \bar{z}_i Z)$. Les deux monômes ont bien évidemment sur le cercle unité, le même module et une phase opposée (comme facteurs respectifs de $A(\omega)$ et $\bar{A}(\omega)$). Aussi, pour construire $A(Z^{-1})$ il suffirait de choisir dans chaque paire, soit le monôme $1 - z_i Z^{-1}$, soit le monôme $1 - \bar{z}_i Z$ et d' effectuer le produit des n monômes ainsi obtenus : on obtient une quantité $A(\omega)$ de norme voulue. Sauf que les choix du deuxième type, $1 - \bar{z}_i Z$, ne conduiraient pas à un filtre A causal, n'étant pas causaux eux-même. Ainsi donc multiplions chacun

de ces derniers monômes par Z^{-1}, ce qui sur le cercle unité ne change pas leur norme evidemment mais qui les rend causaux et de la forme $Z^{-1} - \bar{z}_i$. En conclusion étant donné la fonction d'autocorrélaton $\rho(Z)$, on cherche ses zéros $\{z_i\}$ qu' on peut supposer dorénavant à l' intérieur du cele unité $|z_i| < 1$ (si on trouve un zéro à l' extérieur du cercle unité on sait que son inverse conjugué est aussi zéro, et c' est ce dernier qu'on prend comme représentant du couple) ; pour chacun de ces n zeros z_i on construit le mononôme $1 - z_i Z^{-1}$ ou le monôme $Z^{-1} - \bar{z}_i$. En faisant le produit des n monômes retenus on obtient un polynômes $A_n(Z^{-1})$ dont la norme au carré est $\rho(\omega)$ sur le cercle unité, *à un facteur multiplicatif près.* Ce facteur multiplicatif, $k\bar{k}$, dans l'expression (273) est obtenu en réglant l'égalité avec le coefficient d'ordre zéro ρ_0, par exemple. Le gain k est ainsi determiné, à un facteur de phase près. En général, et ce sera le cas dans l' algorithme *SLR,* on choisira ce facteur de phase de telle manière que le terme d' ordre zéro $a_{n,0}$ de la solution $A_n(\omega)$ soit réel.

On note que, de par la construction qui consiste en n choix binaires, il y a 2^n solutions $A_n(\omega)$, et qui s' ecrivent sous la forme générale

$$A_n(\omega) = k \prod_{i=1}^{n-p} (1 - z_i Z^{-1}) \prod_{l=1}^{l=p} (Z^{-1} - \bar{z}_l), \tag{275}$$

où p est le nombre de zéros choisis à l'extérieur du cercle unité.

Le filtre à déphasage minimum. La solution correspondant à choisir toujours le monôme ayant son zéro à l'intérieur du cercle unité $(1 - z_i Z^{-1})$, $|z_i| < 1$, est dit à déphasage minimum. Ce choix a plusieurs 'bonnes' propriétés.

– De tous les choix possibles (de l'écriture (275)) celui à déphasage minimum est celui qui a le terme d'ordre zéro a_0 de norme maximum. En effet l'écriture (275) avec $p = 0$ donne $a_0 = k$, alors que pour tout autre choix on a

$$a_0 = k \prod_{l=1}^{l=p} (-z_l). \tag{276}$$

– C'est le seul à avoir un 'cepstre' causal.

Le cepstre $\hat{A}(\tau)$ d'un signal est obtenu en prenant la transformée de Fourier du signal puis prenant son logarithme puis la transformée de Fourier inverse. Dans le contexte présent il consiste à prendre le $\log(A(\omega))$ et en prendre la transformée de Fourier.

$$\log(\mathrm{A}(\omega)) = \log(\mathrm{k}) + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=\mathrm{n}-\mathrm{p}} \log(1 - \mathrm{z_i Z^{-1}}) + \sum_{\mathrm{l}=1}^{\mathrm{l}=\mathrm{p}} \log(\mathrm{Z} - \bar{\mathrm{z}}_\mathrm{l}) \tag{277}$$

Donc en considérant les deux types de monômes séparément l'un de l'autre, un monôme 'stable' (dont le zero est à l' intérieur du cercle unité) donnera un cepstre qui sera les coefficients de la série convergente sous la forme

$$\log(1 - z_i Z^{-1}) = -(z_i Z^{-1} + \frac{1}{2} z_i^2 Z^{-2} + \ldots + \frac{1}{k} z_i^k Z^{-k} + \ldots). \tag{278}$$

Alors qu'un monôme 'instable' pour être decomposé en une série convergente doit se voir factorisé par Z^{-1} avant d'être développé

$$\log(Z^{-1}-\bar{z}_i)=\log(Z^{-1}(1-\bar{z}_iZ))=-j\omega-(\bar{z}_iZ+\frac{1}{2}\bar{z}_i^2Z^2+\ldots+\frac{1}{k}\bar{z}_i^kZ^k+\ldots) \tag{279}$$

où on voit apparaître un terme $j\omega$ pour chaque zéro instable, qui pose problème (et donne son nom à la solution 'à déphasage minimum') mais aussi et surtout un développement 'anticausal' avec des termes en Z.

– La solution à phase minimum peut être obtenue directement à partir du spectre $\rho(\omega)$, justement par passage au cepstre.

En effet quels que soient les choix, $p=0$ ou non, faits au sujet polynôme A et de son écriture (275) son spectre s'écrit toujours sous la forme du produit (273) de sa forme minimum phase par le conjugué de sa forme minimum phase. Ces deux facteurs sont facilement séparés l'un de l'autre en passant au logarithme et en développant en série de termes en Z et Z^{-1} , ce qui est fait en pratique en prenant la transformée de Fourier inverse. La partie minimum phase ne donne que des termes causaux, son conjugué que des termes anticausaux ! De façon plus précise, en prenant le logarithme de (273)

$$\hat{\rho}(\omega)=\log(\rho(\omega))=2\log(|k|)+\sum_{i=1}^{n}\log(1-z_iZ^{-1})+\sum_{i=1}^{l}\log(1-\bar{z}_iZ) \tag{280}$$

en prenant sa transformée de Fourier inverse

$$\hat{\rho}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\oint e^{j\omega\tau}\log(\rho(\omega))\mathrm{d}\omega \tag{281}$$

on obtient une somme de deux séries convergentes séries (et aussi le terme d'ordre zèro à traiter spécialement) l'une causale, l'autre anticausale, correspondant au développement des logarithmes

$$\hat{\rho}(\omega)=2\log(|k|)+\sum_{k=1}^{\infty}Z^{-k}\frac{1}{k}(\sum_{i=1}^{n}(-z_i)^k)+\sum_{k=1}^{\infty}Z^{k}\frac{1}{k}(\sum_{i=1}^{n}(-\bar{z}_i)^k). \tag{282}$$

Pour isoler le cepstre du filtre à déphasage minimum il suffit donc de ne conserver que $\hat{\rho}(\tau)$ pour $\tau>0$. En ce qui concerne $\tau=0$ il faut le diviser par deux, pour ne conserver que $\log(|k|)$. Prenant alors la tranformée de Fourier directe on obtient

$$\log A_{\min}(\omega)=\log(|k|)+\sum_{i=1}^{n}\log(1-z_iZ^{-1}) \tag{283}$$

ce qui permet, en prenant l'exponentielle complexe, d'obtenir finalement $A_{\min}$.

Bibliographie

[1] A. Abragam, Les Principes du Magnétisme Nucléaire, Presses Universitaires de France, Paris (1961).

[2] A. Abragam, The Principles of Nuclear Magnetism, Clarendon Press (1963).

[3] R. R. Ernst, W. A. Anderson, Application of Fourier transform spectroscopy to magnetic resonance, *Rev. Sci. Instrum.* **37**, 93–102 (1966).

[4] R. R. Ernst, G. Bodenhausen, A. Wokaun, Principle of Nuclear Magnetic Resonance in One and Two Dimensions, Oxford University Press, Oxford (1988).

[5] P. J. Hore, Nuclear Magnetic Resonance, Oxford University Press (1995).

[6] P. J. Hore, J. A. Jones, S. Wimperis, NMR : The Toolkit, Oxford University Press (2000).

[7] A. Kumar, D. Welti, R. R. Ernst, Nmr Fourier zeugmatography, *J. Magn. Reson.* **18**, 69 (1975).

[8] W. A. Edelstein, J. M. S. Hutchinson, G. Johnson, T. W. Redpath, Spin warp nmr imaging and applications to human whole-body imaging, *Phys. Med. Biol.* **25**, 751–756 (1980).

[9] P. C. Lauterbur, Image formation by induced local interactions : Examples employing nuclear magnetic resonance, *Nature* **243**, 190 (1973).

[10] A. N. Garroway, P. K. Grannell, P. Mansfield, Image formation in nmr by a selective irradiative process, *J. Phys. C* **7**, L457–L462 (1974).

[11] P. Mansfield, A. A. Maudsley, Planar spin imaging by nmr, *J. Phys. C* **9**, L409–L412 (1976).

[12] A. A. M. P. Mansfield, T. Baines, Fast scan proton density imaging by nmr, *J. Phys. E : Sci. Instrum.* **9**, 271–278 (1976).

[13] P. G. Norris, P. Mansfield, I. L. Pykett, R. J. Ordridge, R. E. Coupland, Human whole body line scan imaging by nuclear magnetic resonance, *IEEE Trans. Nuclear Science* **NS-26**, 2817–2820 (1979).

[14] L. E. Crooks, Selective irradiation line scan techniques for nmr imaging, *IEEE Trans. on Nuclear Science* **NS-27**, 1239–1244 (1980).

[15] D. I. Hoult, The solution of the Bloch equation in the precense of a varying b_1 field- an approach to selective pulse analysis., *J. Magn. Reson.* **35**, 69 (1979).

[16] J. M. S. Hutchinson, R. J. Sutherland, J. R. Mallard, Nmr imaging : image recovery under magnetic fields with large non-uniformities, *J. Phys. E.* **11**, 217–221 (1978).

[17] R. J. Sutherland, J. M. S. Hutchinson, Three-dimensional nmr imaging using selective excitation, *J. Phys. E.* **11**, 79–83 (1978).

[18] D. I. Hoult, Zeugmatography : A criticism of the concept of a selective pulse in the precense of a field gradient, *J. Magn. Reson.* **26**, 165 (1977).

[19] G. M. Bydder, R. E. Steiner, I. R. Young, Clinical imaging of the brain : 140 cases, *AJR* **139**, 215–236 (1982).

[20] W. S. Warren, Effects of arbitrary laser or nmr pulse shapes on population inversion and coherence, *J. Chem. Phys.* **81**, 5437–5448 (1984).

[21] P. M. Joseph, L. Axel, M. O'Donnel, Potential problems with selective pulses in nmr imaging systems, *Med. Phys.* **11**, 772–777 (1984).

[22] R. Brandes, D. R. Kearns, Generation of taylored radiofrequency pulses by a simple audiofrequency filter method. II. analysis., *J. Magn. Reson.* **67**, 14–27 (1986).

[23] M. O'Donnel, W. J. Adams, Selective time reversal pulses for nmr imaging, *J. Magn. Reson.* **3**, 377–382 (1985).

[24] S. Conolly, D. Nishimura, A. Macovski, Optimal control solutions to the magnetic resonance selective excitation problem, *IEEE Trans. Med. Imaging* **MI-5**, 106–115 (1986).

[25] J. T. Ngo, P. G. Morris, General solution to the nmr excitation problem for noninteracting spins, *Magn. Reson. Med.* **5**, 217–237 (1987).

[26] H. Yan, J. C. Gore, Improved selective radiofrequency pulses for magnetization inversion and phase reversal, *J. Magn. Reson.* **71**, 116–131 (1987).

[27] J. B. Murdoch, A. H. Lent, M. R. Kritzer, Computer-optimized narrowband pulses for multislice imaging, *J. Magn. Reson.* **74**, 226–263 (1987).

[28] P. Le Roux, Exact synthesis of radio frequency waveforms, *in* Proceedings 7th SMRM, p. 1049, San Francisco (1988).

[29] M. Shinnar, L. Bolinger, J. S. Leigh, Use of finite impulse response filters in pulse design, *in* Proceedings 7th SMRM, p. 695, San Francisco (1988).

[30] M. Shinnar, L. Bolinger, J. S. Leigh, Synthesis of soft pulses with specified frequency responses, *in* Proceedings 7th SMRM, p. 1040, San Francisco (1988).

[31] M. Shinnar, L. Bolinger, J. S. Leigh, The use of finite impulse response filters in pulse design, *Magn. Reson. Med.* **12**, 81–87 (1989).

[32] M. Shinnar, J. S. Leigh, The application of spinors to pulses synthesis and analysis, *Magn. Reson. Med.* **12**, 88–92 (1989).

[33] J. Pauly, P. Le Roux, D. Nishimura, A. Macovski, Parameter relations for the Shinnar-Le Roux selective excitation pulse design algorithm, *IEEE Trans. Med. Imaging* **10**, 53–65 (1991).

[34] P. Le Roux, Procédé d'excitation radiofréquence dans une expérimentation de RMN (1986), french Patent 8610179.

[35] V. H. Subramanian, S. M. Eleff, S. Rehn, J. S. Leigh, An exact synthesis procedure for frequency selective pulses, *in* Proceedings 5th SMRM, pp. 1452–1453 (1986).

[36] L. Emsley, G. Bodenhausen, Optimization of shaped selective pulses for nmr using a quaternion description of their overall propagators, *J. Magn. Reson.* **97**, 135–148 (1992).

[37] L. Emsley, G. Bodenhausen, Self-refocusing effect of 270° gaussian pulses. applications to selective two-dimensional exchange spectroscopy, *J. Magn. Reson.* **82**, 211–221 (1989).

[38] L. Emsley, I. Burghardt, G. Bodenhausen, Double selective inversion in NMR and multiple quantum effects in coupled spin systems, *J. Magn. Reson.* **90**, 214–220 (1990).

[39] A. Messiah, Mécanique Quantique, Dunod, Paris (1960).

[40] A. Messiah, Quantum Mechanics, Dover Publications, New-York (2000).

[41] L. I. Schiff, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, London (1969).

[42] J. Hladik, Les spineurs en physique, Masson, Paris (1996).

[43] J. Hladik, Spinors in Physics, Springer-Verlag, New-York (1999).

[44] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, Mécanique Quantique, Hermann, Paris (1997).

[45] R. Burn, Groups, a path to geometry, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[46] J. B. Kuipers, Quaternions and Rotation Sequences : A Primer with Applications to Orbits Aerospace and Virtual Reality, Princeton University Press, Princeton (2002).

[47] P. Lounesto, Cliffford Algebras and Spinors, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[48] B. Blumich, H. W. Spiess, Quaternions as a practical tool for the evaluation of composite rotations, *J. Magn. Reson.* **61**, 356–362 (1985).

[49] D. Blokhintsev, Principes de Mécanique Quantique, Editions MIR, Moscou (1981).

[50] M. Le Bellac, Physique Quantique, CNRS Editions, Paris (2003).

[51] A. Papoulis, Digital Signal Processing, Signal Analysis, New-York (1977).

[52] L. Rabiner, B. Gold, Theory and Applications of Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1975).

[53] B. L. Tomlinson, H. D. W. Hill, Fourer synthesized excitation of nuclear magnetic resonance with application to homonuclear decoupling and solvent line suppression, *Journal of Chemical Physics* **59**, 1775–1784 (1973).

[54] G. Bodenhausen, R. Freeman, G. A. Morris, A simple pulse sequence for selective excitation in Fourier transform nmr, *J. Magn. Reson.* **23**, 171–175 (1976).

[55] G. A. Morris, R. Freeman, Selective excitation in Fourier transform Nuclear Magnetic Resonance, *J. Magn. Reson.* **29**, 433–462 (1978).

[56] P. J. Hore, Solvent suppression in Fourier transform nuclear magnetic resonance, *J. Magn. Reson.* **55**, 283–300 (1983).

[57] P. J. Hore, A new method for water suppression in the proton spectra of aqueous solutions, *J. Magn. Reson.* **54**, 539–542 (1983).

[58] J. A. Ware, K. Aki, Continuous and discrete inverse-scattering problems in a stratified elastic medium. I. plane waves at normal incidence, *The Journal of the Acoustical Socity of America* **45**, 911–921 (1968).

[59] J. Carlson, Exact solutions for selective excitation pulses, *J. Magn. Reson.* **94**, 376–386 (1991).

[60] C. Epstein, Minimum power pulse synthesis via the inverse scattering transform, *J. Magn. Reson.* **167**, 185–210 (2004).

[61] D. Rourke, P. Morris, The inverse scattering transform and its use in exact inversion of the Bloch equation for noninteracting spins, *J. Magn. Reson.* **99**, 118–138 (1992).

[62] D. Rourke, Selective Pukses in NMR, Ph.D. thesis, Cambridge University Biochemistry department (1992), available at.

[63] E. Y. Remez, General computational method of Tchebycheff approximation, *Atomic Energy Translation* **4491**, 1–85 (1957).

[64] J. McClellan, T. Parks, L. Rabiner, A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters, *IEEE Trans. on Audio and ElectroAcoustics* **AU-21**, 506–526 (1973).

[65] L. Zhu, J. Pauly, A perfectly refocused rf pulse design using zero-padding, *in* Proceedings Fourteenth ISMRM Scientific Meeting, p. 2995, Seattle USA (2006).

[66] L. J. Karam, J. McClellan, Chebyshev digital FIR filter design, *Signal Processing* **76**, 17–36 (1999).

[67] J. F. Kaiser, Non recursive digital filter design using the I0-sinh window function, *in* Proceedings 1974 IEEE Int. Symp. Circuits Systems, pp. 20–23 (1974).

[68] D. A. Rourke, J. Saunders, A simple relationship between total rf pulse energy and magnetization response-the nonlinear generalization of Parseval's relation, *J. Magn. Reson.* **A 115**, 189–196 (1995).

[69] D. F. Elliot, Handbook of Digital Signal Processing, Engineering Applications, Academic Press, San Diego (1987).

[70] S. Pickup, X. Ding, Pulses with fixed magitude and variable phase response profiles, *Magn. Reson. Med.* **33**, 648–655 (1995).

[71] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1975).

[72] E. Goldberg, R. Kurshan, D.Malah, Design of FIR digital filters with nonlinear phase response, *IEEE Trans. Acoustic. Speech Signal Proc.* **29**, 1003–1010 (1981).

[73] Y. Kamp, C. J. Wellekens, Optimal design of minimum phase FIR filters, *IEEE Trans. Acoustic. Speech Signal Proc.* **31**, 922–926 (1983).

[74] M. Shinnar, Reduced power selective excitation radio frequency pulses, *Magn. Reson. Med.* **32**, 658–660 (1994).

[75] P. Le Roux, R. Gilles, G. McKinnon, P. Carlier, Optimized outer volume suppression for single-shot fast spin-echo cardiac imaging, *J. Magn. Reson. Imag.* **8**, 1022–1032 (1998).

[76] R. F. Schulte, J. Taso, P. Boesiger, K. P. Pruessman, Equi-ripple design of quadratic-phase rf pulses, *J. Magn. Reson.* **166**, 111–122 (2004).

[77] R. F. Schulte, Advanced brain spectroscopy at high field strength, Ph.D. thesis, Eidgenossische Technische Hochschule ETH Zurich (2005), nr 16015. Available at http ://e-collection.ethbib.ethz.ch/.

[78] P. P. Vaidyanathan, G. Beitman, On prefilters for digital FIR filters design, *IEEE Trans. Circuits Systems* **32**, 494–499 (1985).

[79] C. Meyer, J. Pauly, A. Macovski, D. Nishimura, Simultaneous spatial and spectral selective excitation, *Magn. Reson. Med.* **15**, 287–304 (1990).

[80] J. Pauly, D. Spielman, A. Macovski, Echo-planar spin-echo and inversion pulses, *Magn. Reson. Med.* **29**, 776–782 (1993).

[81] J. Pauly, B. Hu, S. Wang, D. Nishimura, A. Macovski, A three-dimensional spin-echo or inversion pulse, *Magn. Reson. Med.* **29**, 2–6 (1993).

[82] M. H. Buonocore, A Shinnar-Le Roux algorithm for design of 2D and 3D spatially selective rf pulses, *J. Magn. Reson. Imag.* **2P**, 145, Proc. Tenth SMRI (1992).

[83] D. Kunz, Frequency-modulated radiofrequency pulses in spin-echo and stimulated-echo experiments, *Magn. Reson. Med.* **4**, 129–136 (1987).

[84] R. Gupta, J. Feretti, E. Becker, Rapid scan Fourier transform nmr spectroscopy, *J. Magn. Reson.* **13**, 275–290 (1974).

[85] P. Le Roux, Designing phased rf pulses, *in* Proceedings Third ISMRM Scientific Meeting, p. 553, Nice France (1995).

[86] O. Vignaux, J. Augui, J. Coste, C. Argaud, P. Le Roux, P. Carlier, D. Duboc, P. Legman, Comparison of single-shot fast spin-echo and conventional spin-echo sequences for mr imaging of the heart : Initial experience, *J. Magn. Reson. Imag.* **219**, 545–550 (2001).

[87] O. Vignaux, D. Duboc, J. Coste, C. Argaud, P. Carlier, P. Le Roux, S. Weber, P. Legman, Reproducibility of left ventricular mass measurement using a half-Fourier black-blodd single-shot fast spin-echo sequence within a single breath hold, *J. Magn. Reson. Imag.* **15**, 654–660 (2002).

[88] T. Tran, D. Vigneron, N. Sailasuta, J. Tropp, P. Le Roux, J. Kurhanewicz, S. Nelson, R. Hurd, Very selective suppression pulses for clinical mrsi studies of brain and prostate cancer, *Magn. Reson. Med.* **43**, 23–33 (2000).

[89] K. Hwang, Compatibility of inner volume selection and vss edge saturation with sense, *in* Proceedings 14th ISMRM, p. 2371, Seattle (2006).

[90] H. Bataille, J. Valette, P. Hantraye, V. Lebon, Highly selective excitation method for short TE localized H MRS of the frontal lobe at 3 teslas, *in* Proceedings 14th ISMRM, p. 3005, Seattle (2006).

[91] M. Garwood, L. Delabarre, The return of the frequency sweep : Designing adiabatic pulses for contemporary NMR, *J. Magn. Reson.* **153**, 155–177 (2002).

[92] P. Vaidyanathan, P.-Q. Hoang, Lattice structures for optimal design and robust implementation of two-channel perfect-reconstruction QMF banks, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing* **36**, 81–94 (1988).

[93] P. Le Roux, Simplified model and stabilization of ssfp sequences, *J. Magn. Reson.* **163**, 23–37 (2003).

[94] K. Scheffler, J. Hennig, Is truefisp a gradient-echo or a spin-echo sequence ?, *Magn. Reson. Med.* **49**, 395–397 (2003).

[95] M. Deimling, O.Heid, Magnetization prepared true fisp imaging, *in* Proceedings Second SMR Scientific Meeting, p. 495, San Francisco CA (1994).

[96] A. Oppelt, R. Grauman, H. Fischer, W. Hartl, W. Shajor, Fisp - a new fast MRI sequence, *Electromedica* **54**, 15–18 (1986).

[97] J. Bundy, O. Simonetti, G. Laub, J. P. Finn, Segmented true fisp cine imaging of the heart, *in* Proceedings Seventh Annual Meeting ISMRM, p. 1282, Philadelphia (1999).

[98] O. Heid, True fisp cardiac fluoroscopy, *in* Proceedings Fifth Annual Meeting ISMRM, p. 320, Vancouver (1997).

[99] J. Hennig, Multiecho imaging sequences with low refocusing angles, *J. Magn. Reson.* **78**, 397–407 (1988).

[100] J. Hennig, Echoes- how to generate, recognize, use or avoid them in mr-imaging sequences, part i, *Concepts in Magnetic Resonance* **3**, 125–143 (1991).

[101] H. Y. Carr, E. M. Purcell, Effects of diffusion on free precession in nuclear magnetic resonance experiments, *Phys. Rev.* **94**, 630–638 (1954).

[102] P. Le Roux, S. Hinks, Echoes stabilization in fse sequences, *Magn. Reson. Med.* **30**, 183–191 (1993).

[103] D. C. Alsop, The sensitivity of low flip angle rare imaging, *Magn. Reson. Med.* **37**, 176–184 (1997).

[104] J. Hennig, K. Scheffler, Easy improvement of signal-to-noise in rare-sequences with low refocusing flip angles, *Magn. Reson. Med.* **44**, 983–985 (2000).

[105] B. A. Hargreaves, S. S. Vasanawala, J. M. Pauly, D. G. Nishimura, Characterization and reduction of the transient response in steady-state mr imaging, *Magn. Reson. Med.* **46**, 149–158 (2001).

[106] Y. Huang, T. Huang, T. Chuang, H. Chung, C. Chen, Binomial pulse suppression to reduce ghosting artifacts in transient-state bssfp imaging, *in* Proceedings Fourteenth Annual Meeting ISMRM, p. 2411, Seattle, USA (2006).

[107] R. F. Busse, Reduced rf power without blurring : Correction for modulation of refocusing flip angle in fse sequences, *Magn. Reson. Med.* **51**, 1031–1037 (2004).

[108] G. H. Golub, C. F. Van Loan, Matrix computations, The Johns Hopkins University Press, Baltimore (1990).

[109] M. Hurliman, D. Griffin, Spin dynamics of Carr-Purcell-Meiboom-Gill-like sequences in grossly inhomogeneous b0 and b1 fields and application to NMR well logging, *J. Magn. Reson.* **143**, 120–135 (2000).

[110] M. Abramowitz, I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New-York (1965).

[111] D. G. Norris, P. Bornert, T. Reese, D. Leibfritz, On the application of ultra-fast rare experiments, *Magn. Reson. Med.* **27**, 142–164 (1992).

[112] D. C. Alsop, Phase insensitive preparation of single-shot rare : application to diffusion imaging in humans, *Magn. Reson. Med.* **38**, 527–533 (1997).

[113] P. Le Roux, G. McKinnon, Non cpmg fast spin echo with full signal, *in* Proceedings Sixth ISMRM Scientific Meeting, p. 574, Sydney Australia (1998).

[114] T. Gullion, D. B. Baker, M. S. Conradi, New, compensated Carr-Purcell sequences, *J. Magn. Reson.* **89**, 479–484 (1990).

[115] A. J. Shaka, S. P. Rucker, A. Pines, Iterative Carr-Purcell trains, *J. Magn. Reson.* **77**, 606–611 (1988).

[116] A. A. Maudsley, Modified Carr-Purcell-Meiboom-Gill sequence for NMR Fourier imaging applications, *J. Magn. Reson.* **69**, 488–491 (1986).

[117] Y. Zur, M. L. Wood, L. J. Neuringer, Spoiling of transverse magnetization in steady-state sequences, *MRM* **21**, 251–263 (1991).

[118] J. B. Murdoch, An "effective" method for generating spin-echo intensity expression, *in* Proceedings Second SMR Scientific Meeting, p. 1145, San Francisco CA (1994).

[119] P. Le Roux, Non-cpmg fast spin echo with full signal, *J. Magn. Reson.* **155**, 278–292 (2002).

[120] J. G. Pipe, V. G. Farthing, K. P. Forbes, Multishot diffusion-weighted fse using propeller mri, *Magn. Reson. Med.* **47**, 42–52 (2002).

[121] D. Noll, D. Nishimura, A. Macovski, Homodyne detection in magnetic resonance imaging, *IEEE Trans. Med. Imaging* **10**, 154–163 (1991).

[122] J. B. Murdoch, "extreme echoes" in fse sequences with quadratically incremented phase (quip), *in* Proceedings Eleventh Annual Meeting ISMRM, p. 202, Toronto, Ontario, Canada (2003).

[123] J. Ma, K.-P. Hwang, A. Kumar, J. Polzin, G. McKinnon, P. Le Roux, Diffusion imaging of human vertebrae in vivo with a non-cpmg single shot fast spin echo technique, *in* Proceedings Twelth Annual Meeting ISMRM, p. 1262, Kyoto (2004).

[124] B. Cannon, A. Kumar, C. Costelloe, P. Le Roux, J. Ma, Quantitative diffusion and fat imaging of vertebral compression fractures, *in* Proceedings Fourteenth Annual Meeting ISMRM, p. 545, Seattle (2006).

[125] A. Oner, T. Tali, F. Celikyay, A. Celik, P. Le Roux, Diffusion weighted imaging of the spine with a non-Carr-Purcell-Meiboom-Gill single-shot fast spin-echo sequence :initial experience, *American Journal of Neuroradiology* **To Appear** (2006).

[126] S. Chabert, N. Molko, Y. Cointepas, , P. Le Roux, D. Le Bihan, Diffusion tensor imaging of the human optic nerve using a non-cpmg fast spin echo sequence, *JMRI* **22**, 307–310 (2006).

[127] M. Vogel, F. Lethimonnier, P. Pattynama, P. Le Roux, Use of fast-spin-echo MRI for mr thermometry, *in* Proceedings Ninth ISMRM Scientific Meeting, p. 2195, Glasgow UK (2001).

[128] K. Pruessman, M. Weiger, M. Scheidegger, P. Boesiger, SENSE : sensitivity encoding for fast MRI, *Magn. Reson. Med.* **42**, 952–962 (1999).

[129] J. H. Shirley, Solution of the schrödinger equation with a hamiltonian periodic in time, *Physical Review B* **138**, 979–987 (1965).